मुद्रक
अरुण कुमार राय
टेकनिकल प्रेस प्राइवेट लिमिटेड, 2, लाजपत मार्ग, प्रयाग-2
500-69222

विज्ञान परिषद् अनुसंधान पत्रिका
1968, **11**, 1-4

VIJNANA PARISHAD
ANUSANDHAN PATRIKA
1968, **11**, 1-4

धातुओं तथा उपधातुओं के ऐल्काक्साइड व्युत्पन्न *

डा० रामचरण महरोत्रा

अध्यक्ष, रसायन विभाग, राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर

मित्रो !

गत वर्षों में निर्माण कार्य के लिये अच्छे और अधिक उपयोगी पदार्थों की अनवरत खोज में लगे रसायनज्ञों का ध्यान धातुओं के कार्बनिक व्युत्पन्नों की ओर आकर्षित हुआ है। आज विभिन्न उद्योगों में इन यौगिकों के बढ़ते हुए अनेकानेक उपयोगों को देखते हुए तो यह आश्चर्य सा होता है कि सन् 1923 में पेट्रोल में प्रत्याघाती (antiknock) पदार्थ के रूप में लेड टेट्राएथिल के उपयोग के पहले इस प्रकार के यौगिकों का कोई औद्योगिक उपयोग ज्ञात ही नहीं था।

धातुओं के कार्बनिक व्युत्पन्नों को दो प्रधान वर्गों में विभाजित किया जा सकता है :

1. **कार्बधात्विक यौगिक** : जिनमें धातु का परमाणु कार्बनिक मूलक के कार्बन परमाणु से सीधे ही जुड़ा रहता है। इनमें ऐल्यूमिनियम ऐल्किल ऐसे प्रमुख सदस्य हैं जो टाइटेनियम क्लोराइड की उपस्थिति में निम्न दाब पर आलीफिनों के बहुलकीकरण के उत्प्रेरण में बहुत उपयोगी सिद्ध हुए हैं।

2. **अन्य कार्बनिक व्युत्पन्न** : इन वस्तुतः 'कार्बधात्विक यौगिकों' के अतिरिक्त धातुओं के अन्य कार्बनिक व्युत्पन्नों के उपयोगों की ओर भी विशेष रूप से ध्यान दिया जा रहा है। इनमें से मुख्य यौगिक वे हैं जिनमें धातु के परमाणु आक्सीजन परमाणुओं के माध्यम से कार्बन से जुड़े रहते हैं। इन्हें भी दो उपविभागों में बाँटा जा सकता है :—(क) **ऐल्काक्साइड** या ऐल्कोहलों के धातु व्युत्पन्न और (ख) **कार्बोक्सीलेट** : जो धातुओं तथा कार्बोक्सिलिक अम्लों से बने लवण होते हैं।

ऐल्काक्साइड वे यौगिक हैं जो ऐल्कोहलों के हाइड्रोजन परमाणुओं को धातु परमाणुओं द्वारा विस्थापित किए जाने पर प्राप्त होते हैं। स्पष्टतया क्षारीय ऐल्काक्साइडों को $M(OR)_n$ सामान्य सूत्र द्वारा अंकित किया जा सकता है (इस सूत्र में M केन्द्रीय धातु या उपधातु के परमाणु को अंकित करता है और R ऐल्किल समूह को; जब R ऐरिल समूह को अंकित करता है तो इन यौगिकों को **ऐरिलाक्साइड** का नाम दे दिया जाता है)।

यद्यपि इस समूह के यौगिकों की खोज 100 वर्ष से भी अधिक पूर्व हो चुकी थी (उदाहरण के लिये सिलिकन के ऐल्काक्साइड या ऐल्किल आर्थोसिलिकेट, $Si(OR)_4$) और कुछ कार्बनिक अभि-

---

* 3 जनवरी 1968 को वाराणसी में आयोजित विज्ञान गोष्ठी के समक्ष दिया गया अध्यक्षपदीय भाषण।

क्रियाओं में (उदाहरण के लिये मीखाइनपाण्डार्फ अभिक्रिया में ऐल्यूमिनियम आइसोप्रोपाक्साइड) उत्प्रेरक के रूप में इनका उपयोग 1923 से हो रहा है, किन्तु पिछले 20 वर्षों में इनके सम्बन्ध में विशेष ज्ञान प्राप्त किया जा सका है। तत्वों की आवर्त्त सारणी में उन 50-60 तत्वों को, जिनके ऐल्काक्साइड पिछले 20 वर्षों में संश्लेषित हुए हैं, एक कोष्ठ में दिखलाया गया है और इसी सारणी में जो तत्व वृत्तों से घिरे अंकित किए गये हैं, उन पर हमारी प्रयोगशालाओं में भी कार्य हुआ है। रसायन शास्त्र की इस शाखा में जो तीव्र प्रगति हुई है उसका अनुमान इस बात से लगाया जा सकता है कि धात्वीय ऐल्काक्साइडों पर इसी वर्ष प्रकाशित होने वाले एक समीक्षा-लेख[1] में उद्धृत 300 में से लगभग तीन-चौथाई सन्दर्भ पिछले 5-6 वर्षों के शोध कार्य से सम्बन्धित हैं।

आवर्त्त सारणी

धातुओं के ऐल्काक्साइडों को धातुओं या उनके आक्साइडों या क्लोराइडों को या तो केवल ऐल्कोहलों के साथ अथवा अमोनिया या सोडियम ऐल्काक्साइड जैसे क्षारों की उपस्थिति में अभिक्रिया कराकर सुगमता से तैयार किया जा सकता है। इधर ऐल्कोहल या एस्टर परिवर्तन को भी इनके संश्लेषण में विस्तृत रूप से उपयोग किया गया है :

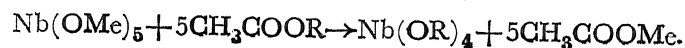
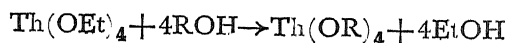
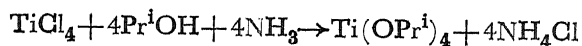
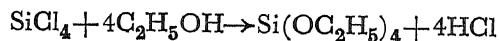
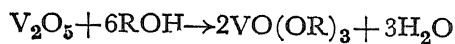
$$M + xROH \rightarrow M(OR)_x + \tfrac{1}{2}xH_2$$

$$V_2O_5 + 6ROH \rightarrow 2VO(OR)_3 + 3H_2O$$

$$SiCl_4 + 4C_2H_5OH \rightarrow Si(OC_2H_5)_4 + 4HCl$$

$$TiCl_4 + 4Pr^iOH + 4NH_3 \rightarrow Ti(OPr^i)_4 + 4NH_4Cl$$

$$Th(OEt)_4 + 4ROH \rightarrow Th(OR)_4 + 4EtOH$$

$$Nb(OMe)_5 + 5CH_3COOR \rightarrow Nb(OR)_4 + 5CH_3COOMe.$$

इन यौगिकों में $\overset{\delta+}{M}-\overset{\delta-}{O}-C$ बन्ध उपर्युक्त अंकित दिशा में ध्रुवित होते हैं और इस ध्रुवण की तीव्रता M तत्व के वैद्युत ऋणीय गुण के साथ घटती जाती है। इसके अतिरिक्त अधिक प्रशाखीय ऐल्किल समूहों के उपयोग से आगमनिक प्रभाव (inductive effect) के कारण इस ध्रुवण की मात्रा में कमी आ जाती है। इसके अतिरिक्त केन्द्रीय धातु परमाणु (M) $\genfrac{}{}{0pt}{}{M}{R}\!\!>\!O\ldots M$ प्रकार के अन्तर-आणविक बन्ध बनाकर अपनी सह-संयोजकता बढ़ाने का प्रयत्न करते हैं। समान सूत्र $M(OR)_n$ वाले समअवयवी यौगिकों में इस प्रकार के बहुलकीकरण की मात्रा ऐल्किल समूह, R, में प्रशाखाओं के बढ़ने के साथ घटती जाती है, इसीलिए प्रशाखीय ऐल्किल समूहों के व्युत्पन्न कम बहुलीकृत तथा अधिक वाष्पशील होते हैं।

कार्बनिक घटक की प्रतिशतता अधिक होने के कारण अधिकांश ऐल्काक्साइड व्युत्पन्न कार्बनिक विलायकों में आसानी से घुल जाते हैं, केवल मेथाक्साइड यौगिक इस प्रकार की विलेयता नहीं प्रदर्शित करते। धात्वीय ऐल्काक्साइड साधारणतया जल, ऐल्कोहलों, कार्बोक्सिलिक अम्लों तथा अन्य ऐसे कार्बनिक यौगिकों के साथ जिनमें प्रत्यक्ष या परोक्ष रूप से 'हाइड्राक्सिल' समूह उपलब्ध हों, सुगमता से अभिक्रिया करते हैं। पिछले 15-16 वर्षों में लन्दन, लखनऊ, गोरखपुर तथा राजस्थान विश्वविद्यालय की रासायनिक प्रयोगशालाओं में निम्नलिखित समूहों के धात्वीय व्युत्पन्नों के संश्लेषण में इसी गुण का विस्तृत उपयोग किया गया है :

1. ग्लाइकॉल व्युत्पन्न
2. ग्लिसरॉल व्युत्पन्न
3. कार्बोक्सिलेट व्युत्पन्न
4. ऐसीटिल ऐसीटोनेट तथा अन्य β-डाइकीटोनेट व्युत्पन्न
5. मेथिल तथा एथिल ऐसीटोऐसीटेट व्युत्पन्न
6. फिनाक्साइड तथा अन्य ऐरिलआक्साइड व्युत्पन्न
7. थायोल व्युत्पन्न।

उपर्युक्त व्युत्पन्नों में से अधिकतर संक्रमण तत्वों (transition elements) के व्युत्पन्न जल में जलअपघटित हो जाते हैं अतः पिछले कुछ वर्षों में इस प्रकार के सैकड़ों यौगिकों का संश्लेषण ऐल्काक्साइडों के माध्यम से ही सम्पन्न हो सका है। उदाहरणार्थ इस विधि से 1953–56 ई० की अवधि में ऐल्यूमिनियम त्रि-कार्बोक्सिलेटों (जिन्हें साधारणतया 'ऐल्यूमिनियम साबुन' कहते हैं) का संश्लेषण सम्भव हो पाया है, जिन्हें 1923 से 1953 तक संसार के अनेक प्रसिद्ध रसायनज्ञ बनाने में असफल रहे। इन्हीं ऐल्काक्साइड व्युत्पन्नों की सहायता से पिछले 3-4 वर्षों में लेन्थनाइड तत्वों (La, Ce, Pr, Nd, Sm, Gd, Yb, Er) के अजलीय ऐसीटिलऐसीटोनेट व्युत्पन्न बनाने में भी पहली बार विशेष सफलता मिली है। इन लेन्थनाइड धातुओं के ऐसीटिलऐसीटोनेट व्युत्पन्न जलीय माध्यम में भी सुगमता से बनाए जा सकते हैं किन्तु जल से प्राप्त यौगिकों में जल के कुछ अणु संयुक्त रहते हैं, जिनमें

से इन अणुओं की यौगिक को विघटित किए बिना विलग कर पाना सम्भव नहीं है। किन्तु बेंजीन-जैसे कार्बनिक विलायक में ऐल्काक्साइडों एवं ऐसीटिल ऐसीटोन के साथ क्रिया द्वारा ये निर्जल रूप में सुगमता से प्राप्त हो जाते हैं। इस प्रकार के लैन्थनाइड यौगिक इधर 'लेसर' कार्य में बहुत उपयोगी सिद्ध हो रहे हैं, जिससे इस प्रकार के संश्लेषणों का महत्व और भी बढ़ गया है।

पिछले 5-7 वर्षों में ऐल्काक्साइड व्युत्पन्नों का विस्तृत अध्ययन आधुनिक भौतिक-रासायनिक विधियों (जैसे एक्स-रे क्रिस्टलकी, इन्फ्रा-रेड मैग्नेटिक रेजोनेंस) द्वारा आरम्भ किया गया है। इन शोध कार्यों से न केवल इन विशिष्ट यौगिकों की संरचना की विशेष जानकारी प्राप्त हुई है, वरन् विभिन्न प्रकार के रासायनिक संयोगों में अन्तरा-परमाणविक बन्धों की प्रकृति समझने में सहायता मिली है।

ऐल्काक्साइड व्युत्पन्न रंजक तथा वार्निश, जल सहिष्णुता (water proofing), स्नेहकों, रेजिन तथा तल-लेपन आदि उपयोगों में विशेष उपयोगी सिद्ध हो रहे हैं। इनमें सबसे अधिक टाइटेनियम यौगिकों का प्रचार हुआ है। टाइटेनियम यौगिकों में से पन्द्रह का औद्योगिक उत्पादन प्रारम्भ हो चुका है और 5-6 ऐल्काक्साइडों का उत्पादन प्रारम्भिक अवस्था में है। ऐलूमिनियम आइसोप्रोपाइक्साइड तथा सोडियम मेथाक्साइड अनेक कार्बनिक अभिक्रियाओं के लिये उत्प्रेरक के रूप में उपयोगी सिद्ध हो रहे हैं। मैग्नीशियम एथाक्साइड एक संकर-संधि तथा संघनन उत्प्रेरक है, इसके अतिरिक्त इसका उपयोग चुम्बकीय रिकार्डिंग टेप पर लेप करने में तथा विद्युत पार्यलेप बनाने में किया जाता है। रेजिनों के ज्वालारोधी गुण को उन्नत करने के लिये ऐण्टीमनी उपधातु का उपयोग होता रहा है। रेजिनों में ऐण्टीमनी प्रविष्ठ कराने के लिये इसका एथाक्साइड अत्यन्त उपयोगी सिद्ध हुआ है। इसी प्रकार अन्य ऐल्काक्साइडों के भी अनेक नए औद्योगिक उपयोग ढूंढे जा रहे हैं। इनके पेटेण्टों की संख्या लगभग एक हजार तक पहुँच चुकी है। इनका विशेष एवं विस्तृत विवरण, डाक्टर जे० एच० हारवुड द्वारा लिखित 'इण्डस्ट्रियल ऐप्लीकेशन्स आफ आर्गनो-मेटैलिक कम्पाउण्ड्स' नामक पुस्तक में प्राप्त है।

निर्देश

1. महरोत्रा, रामचरण। **इनारगैनिका किमिका ऐक्टा रिव्यूज**, दिसम्बर 1967।

विज्ञान परिषद् अनुसंधान पत्रिका
1968, **11**, 5-9

VIJNANA PARISHAD
ANUSANDHAN PATRIKA
1968, **11**, 5-9

हाइपरज्यामितीय फलनों से सम्बन्धित कतिपय समाकल

एस० एन० माथुर तथा आर० के० सक्सेना

गणित विभाग, जोधपुर विश्वविद्यालय, जोधपुर

[प्राप्त—अप्रैल 3, 1967]

सारांश

इस शोध निबन्ध में हम क्रियात्मक कलन पर § 2 में सिद्ध की गई प्रमेय के आधार पर हाइपर-ज्यामितीय फलनों के गुणनफल सम्बन्धी कतिपय समाकलों का मान ज्ञात करेंगे।

Abstract

Some integrals involving hypergeometric functions. *By* S. N. Mathur and R. K. Saxena, Dept. of Mathematics, University of Jodhpur, Jodhpur.

In this note we evaluate some integrals involving products of hypergeometric functions of different arguments with the help of a theorem on Operational Calculus proved in §2.

1. भूमिका

इस टिप्पणी का उद्देश्य क्रियात्मक कलन पर § 2 में सिद्ध की गई प्रमेय के आधार पर कुछ हाइपर-ज्यामितीय फलनों के गुणनफल सम्बन्धी समाकलों का मान ज्ञात करना है। समाकलों का मान लारिसेला के हाइपरज्यामितीय फलन F_A के आधार पर ज्ञात किया गया है।

इस टिप्पणी में सर्वमान्य लैपलास के समाकल

$$\phi(p)=p\int_0^\infty e^{-pt}h(t)\,dt$$

को व्यक्त करने के लिय एक रूढ़ संकेत $\phi(p) \doteq h(t)$ का व्यवहार किया जावेगा। इसी क्रम में निम्नांकित परिणामों की आवश्यकता होगी :

हम जानते हैं कि

$$W_{k,\mu}(Z)=\sum_{\mu,\,-\mu}\frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2}-k-\mu)}\,M_{k,\mu}(Z), \tag{1}$$

जहाँ $\sum\limits_{\mu, -\mu}$ संकेत यह बताता है कि इसके बाद के व्यंजक में μ को $-\mu$ द्वारा प्रतिस्थापित करके दोनों व्यंजकों को जोड़ देना होगा।

गोल्डस्टीन [2, p. 105] ने क्रियात्मक कलन की पार्सेवाल प्रमेय को निम्नांकित रूप में पुनः व्यक्त किया है :

यदि

$$\phi(p) \doteqdot h(t) \text{ तथा } \psi(p) = g(t),$$

तो

$$\int_0^\infty \phi(t) g(t) t^{-1} dt = \int_0^\infty h(t) \psi(t) t^{-1} dt, \tag{2}$$

यदि समाकल अभिसारी हों।

अन्ततः यदि $|\arg a| < \pi$, $|\arg b| < \pi$, $R(K+\lambda) < 1$, तो [1, p. 213, eq. 8]

$$t^{-k-\lambda}(2a+t)^{k-\mu-1/2}(2b+t)^{\lambda-\mu-1/2}$$

$$\times F\left[\tfrac{1}{2}-k+\mu,\ \tfrac{1}{2}-\lambda+\mu;\ 1-k-\lambda;\ \frac{t(2a+2b+t)}{(2a+t)(2b+t)}\right]$$

$$\doteqdot \Gamma(1-k-\lambda)(4ab)^{-\mu-1/2} \exp\{(a+b)p\} W_{k,\mu}(2ap) W_{\lambda,\mu}(2bp), \tag{3}$$

2. प्रमेय

यदि
$$\phi(p) \doteqdot h(t)$$

तथा
$$\psi(p, a, b) \doteqdot \frac{1}{t} W_{k,\mu}(2at) W_{\lambda,\mu}(2bt) h(t),$$

तो
$$\psi(p, a, b) = \frac{2p(ab)^{\mu+1/2}}{\Gamma(1-k-\lambda)} \int_0^\infty t^{-k-\lambda}(p+a+b+2t)^{-1} \phi(p+a+b+2t)$$

$$\times (a+t)^{k-\mu-1/2}(b+t)^{\lambda-\mu-1/2} F\left[\tfrac{1}{2}-k+\mu,\ \tfrac{1}{2}-\lambda-\mu;\right.$$

$$\left. 1-k-\lambda; \frac{t(a+b+t)}{(a+t)(b+t)}\right] dt \tag{4}$$

यदि $h(t)$ तथा $\phi(a+b+p+2t)$ का सम्बन्ध $L(0, \infty)$ से हो, $R(k+\lambda) < 1$, $R(p+a+b) > 0$ तथा $h(t)$ a, एवं b पर निर्भर न हो।

उपपत्ति

$$\because \quad \phi(p) = h(t),$$

अतः $p\phi(p+a+b+c)/(a+b+c+p) \doteqdot \exp\{-(a+b+c)t\}h(t)$ (5)

(3) तथा (5) में (2) का व्यवहार करने पर तथा c को p द्वारा प्रतिस्थापित करने पर हमें यह परिणाम प्राप्त होगा।

उपप्रमेय—जब $k=\lambda=0$ तो प्रमेय निम्नांकित में परिणत हो जावेगी।

यदि $$\phi(p) \doteqdot h(t)$$

तथा $$\psi(p, a, b) \doteqdot K_\mu(at)K_\mu(bt)h(t),$$

तो $$\psi(p, a, b) = \pi p(ab)^{\mu/2-1/4}\int_0^\infty \{(a+t)(b+t)\}^{-\mu/2-1/4}$$

$$\times(p+a+b+2t)^{-1}\phi(p+a+b+2t)P_{\mu-1/2}\left[\frac{2(a+t)(b+t)}{ab}-1\right]dt, \quad (6)$$

यदि $h(t)$ तथा $\phi(a+b+p+2t)$ का सम्बन्ध $L(0, \infty)$ से हो, $R(p+a+b)>0$ तथा $h(t)$ a तथा b पर निर्भर न हो।

3. **सम्प्रयोग**

उदाहरण 1. यदि हम [1, p. 216, eq. 16] को लें

$$h(t) = t^\sigma W_{l, m}(2t)$$

$$\doteqdot \frac{p\Gamma(\frac{3}{2}+\sigma+m)\Gamma(\frac{3}{2}+\sigma-m)}{2^{\sigma+1}\Gamma(2+\sigma-l)}$$

$$\times F[\tfrac{3}{2}+\sigma+m, \tfrac{3}{2}+\sigma-m; 2+\sigma-l; \tfrac{1}{2}(1-p)] = \phi(p),$$

जहाँ $R(p)>-1$, $R(\sigma\pm m)>-\frac{3}{2}$, तो (1) तथा [1, p. 216, eq. 14] से हम देखेंगे कि

$$\frac{1}{t}W_{k, \mu}(2at)W_{\lambda, \mu}(2bt)h(t)$$

$$= t^{\sigma-1}W_{k, \mu}(2at)W_{\lambda, \mu}(2bt)W_{l, m}(2t)$$

$$\doteqdot p\sum_{\mu, -\mu}\frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2}-k-\mu)}\sum_{\mu, -\mu}\frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2}-\lambda-\mu)}\sum_{m, -m}\frac{\Gamma(-2m)}{\Gamma(\frac{1}{2}-l-m)}$$

$$\times (4ab)^{\mu+1/2}\, 2^{m+1/2}\, (p+a+b+1)^{-\sigma-2\mu-m-3/2}\, \Gamma(\sigma+m+2\mu+\tfrac{3}{2})$$

$$\times F_A\begin{pmatrix}\sigma+m+2\mu+\tfrac{3}{2};\ 1-K+\mu,\ \tfrac{1}{2}-\lambda+\mu,\ \tfrac{1}{2}-l+m; \\ 2\mu+1, 2\mu+1, 2m+1;\ \dfrac{2a}{p+a+b+1},\ \dfrac{2b}{p+a+b+1},\ \dfrac{2}{p+a+b+1}\end{pmatrix}$$

$$=\psi(p, a, b),$$

जहाँ $R(\sigma\pm m\pm 2\mu+\tfrac{3}{2})>0,\ R(p+a+b+1)>0.$

(4) का उपयोग करने पर हम देखेंगे कि यदि $R(1-k-\lambda)>0$, $|\arg a|<\pi$, $|\arg b|<\pi$, $R(p)>0$, $R(\sigma\pm m\pm 2\mu+\tfrac{3}{2})>0$, तो

$$\int_0^\infty t^{-k-\lambda}(a+t)^{k-\mu-1/2}\,(b+t)^{\lambda-\mu-1/2}$$

$$\times F[\tfrac{3}{2}+\sigma+m,\ \tfrac{3}{2}+\sigma-m;\ 2+\sigma-l;\ 1-p-t]$$

$$\times F\left[\tfrac{1}{2}-k+\mu,\ \tfrac{1}{2}-\lambda+\mu;\ 1-k-\lambda;\ \frac{t(a+b+t)}{(t+a)(t+b)}\right]dt$$

$$=\frac{\Gamma(2+\sigma-l\ \Gamma(1-k-l)}{(ab)^{\mu+1/2}\Gamma(\tfrac{3}{2}+\sigma\pm m)}\sum_{\mu,-\mu}\frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma\ \tfrac{1}{2}-k-\mu)}\sum_{\mu,-\mu}\frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma(\tfrac{1}{2}-\lambda-\mu)}$$

$$\times\sum_{m,-m}\frac{\Gamma(-2m)}{\Gamma(\tfrac{1}{2}-l-m)}(ab)^{\mu+1/2}\,p^{-\sigma-2\mu-m-3/2}\,\Gamma(\sigma+m+2\mu+\tfrac{3}{2})$$

$$\times F_A\begin{pmatrix}\sigma+2\mu+m+\tfrac{3}{2};\ \tfrac{1}{2}-k+\mu,\ \tfrac{1}{2}-\lambda+\mu,\ \tfrac{1}{2}-l+m;\ 2\mu+1 \\ 2\mu+1,\ 2l+1;\ a/p,\ b/p,\ 1/p\end{pmatrix} \qquad (7)$$

उदाहरण 2. माना कि [1, p. 215, eq. 11]

$$h(t)=t^{\nu}M_{l,\,m}(2t)$$

$$\doteqdot 2^{m+1/2}\Gamma(\tfrac{3}{2}+\nu+m)\,(1+p)^{-3/2-\nu-m}$$

$$\times F\left(\tfrac{1}{2}+m+\nu,\ \tfrac{1}{2}-l+m;\ 2m+1;\ \frac{2}{1+p}\right)=\phi(p),$$

जहाँ $R(\tfrac{3}{2}+\nu+m)>0, R(p)>1$, तो (1) तथा [1, p. 216 (14)] से

$$\frac{1}{t}W_{k,\,\mu}(2at)W_{\lambda,\,\mu}(2bt)h(t)$$

$$=t^{\nu-1}W_{k,\,\mu}(2at)W_{\lambda,\,\mu}(2bt)\,M_{l,\,m}(2t)$$

$$\doteq \sum_{\mu,-\mu} \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2}-\lambda-\mu)} \sum_{\mu,-\mu} \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2}-k-\mu)} (4ab)^{\mu+1/2} 2^{m+1/2}$$

$$\times (p+a+b+1)^{-\nu-m-2\mu-3/2} \Gamma(\nu+2\mu+m+\tfrac{3}{2})$$

$$\times F_A\left(\begin{matrix} \nu+2\mu+m+\frac{3}{2}; \frac{1}{2}-k+\mu, \frac{1}{2}-\lambda+\mu, \frac{1}{2}-\lambda+\mu, \frac{1}{2}-l+m; \\ 2\mu+1, 2\mu+1, 2m+1; \frac{2a}{p+a+b+1}, \frac{2b}{p+a+b+1}, \frac{2}{p+a+b+1} \end{matrix}\right)$$

$$=\psi(p, a, b)$$

जहाँ $$R(\nu+m\pm 2\mu) > -\tfrac{3}{2},\ R(p+a+b) > 1.$$

(4) से यह विदित होता है कि यदि $R(1-k-\lambda)>0$,

$$R(\nu+m\pm 2\mu) > -\tfrac{3}{2},\ |\arg a|<\pi,\ |\arg b|<\pi,\ R(p)>0,$$

तो $$\int_0^\infty t^{-k-\lambda}(a+t)^{k-\mu-1/2}(b+t)^{\lambda-\mu-1/2}(p+t)^{-\nu-m-3/2}$$

$$\times F\left(m+\nu+\tfrac{1}{2}, m-l+\tfrac{1}{2}; 2m+1; \frac{1}{p+t}\right)$$

$$\times F\left[\tfrac{1}{2}-k+\mu, \tfrac{1}{2}-\lambda+\mu; 1-k-\lambda; \frac{t(a+b+t)}{(t+a)(t+b)}\right] dt$$

$$=\frac{\Gamma(1-k-\lambda)}{\Gamma(\frac{3}{2}+\nu+m)(ab)\mu+\frac{1}{2}} \sum_{\mu,-\mu} \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2}-\lambda-\mu)} \sum_{\mu,-\mu} \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2}-k-\mu)}$$

$$\times (ab)^{\mu+1/2} p^{-\nu-m-2\mu-3/2} \Gamma(\nu+m+2\mu+\tfrac{3}{2})$$

$$\times F_A\left(\begin{matrix} \nu+m+2\mu+\frac{3}{2}; 1-k-\mu, \frac{1}{2}-\lambda+\mu, \frac{1}{2}-l+m \\ 2\mu+1, 2\mu+1, 2m+1; a/p, b/p, 1/p \end{matrix}\right), \quad (8)$$

निर्देश

1. एर्डेल्यी, ए० तथा अन्य। Tables of integral transforms. **भाग 1, मैकग्राहिल न्यूयार्क**, 1954.

2. गोल्डस्टीन, एस० **प्रोसी० लन्दन मैथ० सोसा०**, 1932, **34(4)**, 103-125.

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका
1968, **11**, 11-29

VIJNANA PARISHAD
ANUSANDHAN PATRIKA
1968, **11**, 11-29

Ψ_2, F_c तथा H-फलनों वाले कतिपय अनन्त समाकल

पी० एन० राठी, गणित विभाग, एम०आर० इंजीनियरिंग कालेज, जयपुर
तथा
ओ० पी० गुप्ता, गणित विभाग, जोधपुर विश्वविद्यालय, जोधपुर

[प्राप्त—नवम्बर 3, 1966]

सारांश

K_ν (Z) के समाकल निरूपणों का उपयोग करते हुय हमने माइजर परिवर्त पर दो प्रमेयों की स्थापना की है। इन प्रमेयों की सहायता से कई अनन्त समाकलों का मान ज्ञात किया गया है जिनमें H-फलन, लारिसेला फलन F_c, सार्वीकृत संगमी हाइपरज्यामितीय फलन Ψ_2 निहित हैं। इन फलनों के तर्कों में $\frac{x}{a+bx+cx^2}$ आया है। इन परिणामों की कई रोचक विशिष्ट दशायें भी दी गई हैं।

Abstract

Some infinite integrals involving Ψ_2, Fc and H-functions. *By* P. N. Rathie, Department of Mathematics, Engineering M. R. College, Jaipur and O. P. Gupta, Department of Mathematics, Faculty of Engineering, University of Jodhpur, Jodhpur.

By utilizing the integral representations for $K_\nu(Z)$ we have established two theorems on Meijer transform. A number of infinite integrals involving the H-function, the Lauricella's function F_c, and the generalized confluent hypergeometric function Ψ_2 have been evaluated with the help of these theorems. The arguments of these functions contain $\left(\frac{x}{a+bx+cx^2}\right)$. A number of very interesting particular cases of these results have also been given.

1. फाक्स [7, p. 408] ने माइजर के G-फलन [10, p. 229] से भी अधिक व्यापक फलन को निम्नांकित समीकरण द्वारा पारिभाषित किया है:

$$(1) \quad H_{l, q}^{m, n}\left[Z \middle| \begin{matrix} (a_1, e_1), \ldots, (a_l, e_l) \\ (b_1, f_1), \ldots, (b_q, f_q) \end{matrix}\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\prod_{j=1}^{m} \Gamma(b_j-f_j\xi)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j+e_j\xi)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j+f_j\xi)\prod_{j=n+1}^{l}\Gamma(a_j-e_j\xi)} z^{\xi}\, d\xi$$

जहाँ रिक्त गुणनफल को 1 माना गया है; $m, n, 1, q$ पूर्णांक हैं जो $0\leqslant n\leqslant 1, 0\leqslant m\leqslant q$ तुष्ट करतीं हैं; $e_j(j=1,\ldots,1)$, $f_j(j=1,\ldots,q)$ ऐसे धन पूर्णांक हैं कि

$$\sum_{j=1}^{q} f_j-\sum_{j=1}^{l} e_j>0 \quad \text{तथा} \quad a_j(j=1,\ldots,1),\, b_j(j=1,\ldots,q)$$

ऐसी संकर संख्या हैं कि

$$e_j(b_h+\eta)\neq f_h(a_j-1-\zeta) \quad \text{यदि } \eta,\, \zeta=0,\, 1,\, 2,\ldots;$$

$h=1,\ldots, m$, $j=1,\ldots, n$; L बार्नेस प्रकार का ऐसा उपयुक्त कन्टूर है कि $\Gamma(b_j-f_j\,\xi)$, $j=1,\ldots, m$ के ध्रुव कन्टूर के दाहिने हाथ तथा $\Gamma(1-a_j+e_j\,\xi)$, $j=1,\ldots, n$ के कन्टूर बायें हाथ स्थित रहते हैं।

(1) में प्रयुक्त संकेत गुप्ता [9, p. 98] के अनुकरण पर हैं जिन्होंने फलन के लिये कुछ समाकल परिवर्त तथा आवर्ती सम्बन्ध प्राप्त किये हैं। ब्राक्शमा[2] ने इस फलन की अपने शोध प्रबन्ध में विस्तार से विवेचना दी है।

प्रस्तुत निबन्ध में माइजर परिवर्त पर दो प्रमेयों का वर्णन है जिनको $K_\nu(z)$ के समाकल निरूपण का उपयोग करते हुये सिद्ध किया गया है। इन प्रमेयों की सहायता से H-फलन, n चरों वाला लारिसेला का हाइपरज्यामितीय फलन $F_C[1,\text{p. } 114]$ तथा n चरों वाला सार्वीकृत संगमी हाइपरज्यामितीय फलन $\psi[1, \text{p. } 134]$ जैसे कई अनंत समाकलों का मान ज्ञात किया गया है। इन फलनों के तर्कों में $\{x/(a+bx+cx^2)\}$आता है जहाँ x समाकलन का चर है और a, b, c, λ स्थिरांक हैं। इन परिणामों की कई रोचक विशिष्ट दशायें व्युत्पन्न की गई हैं जिनमें ऐपेल फलन F_4, हाइपरज्यामितीय फलन ${}_4F_3, {}_2F_1$; संगमी हाइपरज्यामितीय फलन ${}_3F_3, {}_1F_1$ तथा प्रथम प्रकार के I_ν परिवर्द्धित बेसिल फलन निहित हैं।

इस शोध पत्र में सर्वत्र माइजर तथा लैपलास परिवर्तों के लिये क्रमशः हम निम्नांकित संकेतों का प्रयोग करेंगे :—

$$(2) \qquad k_\nu\{f(t); p\}=\int_0^\infty (pt)^{1/2} K_\nu(pt)\, f(t)\, dt, \quad R(p)>0.$$

$$(3) \qquad L\{f(t); p\}=\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt, \quad R(p)>0.$$

यह भलीभाँति ज्ञात है कि $\nu = \pm\frac{1}{2}$ होने पर

$$k_{\pm 1/2}\{f(t);p\} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} L\{f(t);p\}.$$

2. प्रथम प्रमेय जिसे सिद्ध करना है :

$$(4)\quad \int_0^\infty x^{\mu/2+\delta/2}\{\sqrt{(c)}x-\sqrt{a}\}^{-2\delta}\,(a+bx+cx^2)^{\delta/2-\mu/2-1/2}\,k_{\mu-\delta+1/2}\left\{f(t);\,2\left(\frac{a+bx+cx^2)^{1/2}}{x}\right\}dx$$

$$=\Gamma(\tfrac{1}{2}-\delta)\,c^{-1/2}\,(b+2\sqrt{(ac)})^{-\mu/2-1/4}\,k_\mu\{t^{\delta-1/2}f(t);\,2(b+2\sqrt{(ac)})^{1/2}\},$$

यदि $R(a)>0,\ R(c)>0,\ R(b+2\sqrt{(ac)})>0,\ R(\frac{1}{2}-\delta)>0,$

$R(\delta+\eta\pm\mu+1)>0,$ जहाँ $f(t)=0(t^\eta)$ यदि t छोटा हो।

उपपत्ति : (4) का बायाँ पक्ष समाकल के क्रम को बदलने पर।

$$\int_0^\infty x^{\delta/2+\mu/2}\{\sqrt{(c)}\,x-\sqrt{a}\}^{-2\delta}\,(a+bx+cx^2)^{\delta/2-\mu/2-1/2}$$

$$\left[\int_0^\infty\left\{2\left(\frac{a+bx+cx^2}{x}\right)^{1/2}t\right\}^{1/2}K_{\mu-\delta+1/2}\left\{2\left(\frac{a+bx+cx^2}{x}\right)^{1/2}t\right\}f(t)\,dt\right]dx$$

$$=2^{1/2}\int_0^\infty t^{1/2}f(t)\left[\int_0^\infty x^{\delta/2+\mu/2-1/4}\{\sqrt{(c)}\,x-\sqrt{(a)}\}^{-2\delta}\right.$$

$$\left.(a+bx+cx^2)^{\delta/2-\mu/2-1/4}\,K_{\mu-\delta+1/2}\left\{2\left(\frac{a+bx+cx^2}{x}\right)^{1/2}t\right\}dx\right]dt$$

अब [13] की सहायता से x-समाकल का मान ज्ञात करने पर

$$(5)\quad \int_0^\infty x^{\delta/2+\mu/2-1/4}\{\sqrt{(c)}\,x-\sqrt{(a)}\}^{-2\delta}(a+bx+cx^2)^{\delta/2-\mu/2-1/4}\,K_{\mu-\delta+1/2}\left\{\ \left(\frac{a+bx+cx^2}{x}\right)^{1/2}\right\}dx$$

$$=\Gamma(\tfrac{1}{2}-\delta)\, c^{-1/2}\{b+2\sqrt{(ac)}\}^{-\mu/2} K_\mu\{2(b+2\sqrt{(ac)})^{1/2}\},$$

यदि $R(a)>0,\ R(c)>0,\ R(\frac{1}{2}-\delta)>0$. तो हमें (4) की उपलब्धि होती है।

समाकलों के क्रम के प्रतीपन के हेतु निम्न प्रतिबन्ध आवश्यक होंगे:—

(i) x-समाकल पूर्णतया अभिसारी हो। यह ऐसा तभी हो सकता है यदि

$$R(a)>0, R(c)>0, R(\tfrac{1}{2}-\delta)>0.$$

(ii) t-समाकल पूर्णतया अभिसारी हो। यह ऐसा तभी हो सकता है यदि

$$R(a)>0, R(c)>0, R\{\tfrac{3}{2}\pm(\mu-\delta+\tfrac{1}{2})+\eta\}>0 \text{ जहाँ}$$

$f(t)=O(t^\eta)$ यदि t छोटा हो।

(iii) परिणामी समाकल अभिसारी हो। यह ऐसा तभी हो सकता है यदि

$$R(b+2\sqrt{ac})>0, R(\delta+\eta\pm\mu+1)>0.$$

अतः समाकलन का क्रम-परिवर्तन ड ला वैले पूसिन प्रमेय [3, p. 504] के अनुसार विदित है यदि निम्नांकित प्रतिबन्ध तुष्ट होते हों :

$$R(a)>0,\ R(c)>0,\ R(\tfrac{1}{2}-\delta)>0,\ R(b+2\sqrt{ac})>0,$$

$R(\delta+\eta\pm\mu+1)>0$ जहाँ $f(t)=O(t^\eta)$ यदि t छोटा हो।

उदाहरण 1.

$$f(t)=t^\sigma H_{l, q}^{m, n}\left[Z t^\rho \left|\begin{matrix}(a_1,e_1), \dots, (a_l, e_l)\\(b_1, f_1), \dots, (b_q,f_q)\end{matrix}\right.\right], \text{ मान लेने पर}$$

तथा [9, p. 99(6)] का व्यवहार करने पर प्रमेय (4) से निम्नांकित परिणाम निकलता है :

$$(6) \qquad \int_0^\infty x^{(\delta+\sigma+\mu+1)/2}(\{\sqrt{(c)}x-\sqrt{(a)}\}^{-2\delta}(a+bx+cx^2)^{(\delta-\mu-\sigma-2)/2}$$

$$H_{l+2, q}^{m, n+2}\left[Z\left(\frac{x}{a+bx+cx^2}\right)^{\rho/2}\right.$$

$$\left|\begin{matrix}\frac{1}{2}(-\mu-\sigma+\delta, \rho), \frac{1}{2}(\mu-\delta-\sigma+1, \rho), (a_1, e_1), \dots, (a_l, e_l)\\(b_1,f_1), \dots, (b_q,f_q)\end{matrix}\right]dx$$

$$=\Gamma(\tfrac{1}{2}-\delta)c^{-1/2}(b+2\sqrt{ac})^{-(\mu+\delta+\sigma+1)/2}$$

$$H_{l+2,\ q}^{m,\ n+2}\left[Z(b+2\sqrt{ac})^{-\rho/2}\ \middle|\ \begin{matrix}\tfrac{1}{2}(1-\mu-\delta-\sigma,\rho),\tfrac{1}{2}(\mu-\sigma-\delta+1,\rho),(e_1,a_1)(a_l,e_l)\\ (b_1,f_1),\ \ldots,\ (b_q,f_q)\end{matrix}\right],$$

$$R(a)>0,\ R(c)>0,\ R(\tfrac{1}{2}-\delta)>0,\ R(b+2\sqrt{ac})>0,\ \rho>0,$$

$0\leqslant m\leqslant q,\ 0\leqslant n\leqslant 1,\ \lambda>0,\ |\arg z|<\frac{\lambda\pi}{2}$ के लिये विहित है

यदि $\lambda\equiv\sum_{j=1}^{n} e_j-\sum_{j=n+1}^{l} e_j+\sum_{j=1}^{m} f_j-\sum_{j=m+1}^{q} f_j+\rho$ तथा $R\left(\delta+\sigma+\mu+\rho\min\frac{b_n}{f_n}+1\right)$

$>0,\ h=1,\ \ldots,\ m.$

जब $\delta=0,\ b_{q-1}=-\mu/2-\sigma/2+\delta/2,\ b_q=\mu/2-\delta/2-\sigma/2+\tfrac{1}{2},\ f_{q-1}=f_q=\rho/2,$ $e_1=\ldots=e_l=f_1=\ldots=f_{q-2}=1$; तो (6) सक्सेना [11, p 663(5)] द्वारा दिए गये फल का रूप धारण कर लेता है।

उदाहरण 2.

$f(t)=t^{\sigma-1}\prod_{i=1}^{r}[\mathcal{J}_v\ (a_i\ t)]$, मान लेने पर तथा [12, p. 162] का उपयोग करने पर

प्रमेय से निम्नांकित फल प्राप्त होता है :—

$$(7)\quad \int_0^\infty x^{(\sigma+\delta+\mu+\sum_{i=1}^{r}\nu_i)/2}(\sqrt{(c)}x-\sqrt{a})^{-2\delta}(a+bx+cx^2)^{(\delta-\mu-\sigma-\sum_{i=1}^{r}\nu_i-1)/2}$$

$$F_c\left[\tfrac{1}{2}(\sigma+\delta-\mu+\sum_{i=1}^{r}\nu_i),\ \tfrac{1}{2}(\sigma+\mu-\delta+\sum_{i=1}^{r}\nu_i+1);\ 1+\nu_1\ \ldots,\ 1+\nu_r;\right.$$

$$\left.-\frac{a_1{}^2x}{4(a+bx+cx^2)},\ldots,-\frac{a_r{}^2x}{4(a+bx+cx^2)}\right]dx.$$

$$=\Gamma(\tfrac{1}{2}-\delta)c^{-1/2}(b+2\sqrt{ac})^{-1/2(\mu+\delta+\sigma+\sum_{i=1}^{r}\nu)}\Gamma\{\tfrac{1}{2}(\sigma+\mu+\delta+\sum_{i=1}^{r}\nu_i)\}$$

$$[\Gamma\{\tfrac{1}{2}(\sigma+\mu-\delta+\sum_{i=1}^{r}\nu_i+1)\}]^{-1}.$$

$$F_c\Big[\tfrac{1}{2}(\sigma+\delta-\mu+\sum_{i=1}^{r}\nu_i),\ \tfrac{1}{2}(\sigma+\delta+\mu+\sum_{i=1}^{r}\nu_i);\ 1+\nu_1,\ \ldots,\ 1+\nu_r;$$

$$-\frac{\alpha_1^2}{4(b+2\sqrt{ac})},\ \ldots,\ -\frac{\alpha_r^2}{4(b+2\sqrt{ac})}\Big],$$

$R(a)>0,\ R(c)>0,\ R(b+2\sqrt{ac})>0,\ R(\tfrac{1}{2}-\delta)>0,\ R(\sigma+\delta+\mu$

$+\sum_{i=1}^{r}\nu_i)>0$ के लिये विहित है।

जब $n=2$ तो F_c F_4 में खंडित होता है और (7) निम्नांकित परिणाम में परिवर्तित हो जाता है:

$$(8)\quad \int_0^\infty x^{(\delta+\mu+\sigma+\nu_1+\nu_2)/2}(\sqrt{(c)}x-\sqrt{a})^{-2\delta}(a+bx+cx^2)^{(\delta-\mu-\sigma-\nu_1-\nu_2-1)/2}$$

$$F_4\Big[\tfrac{1}{2}(\sigma+\delta-\mu+\nu_1+\nu_2),\ \tfrac{1}{2}(\sigma+\mu-\delta+\nu_1+\nu_2+1);\ 1+\nu_1,\ 1+\nu_2;$$

$$-\frac{\alpha_1^2x}{4(a+bx+cx^2)},\ -\frac{\alpha_2^2x}{4(a+bx+cx^2)}\Big]\,dx$$

$$=\Gamma(\tfrac{1}{2}-\delta)c^{-1/2}(b+2\sqrt{ac})^{-(\mu+\delta+\sigma+\nu_1+\nu_2)/2}\Gamma\{\tfrac{1}{2}(\sigma+\mu+\delta+\nu_1+\nu_2)\}$$

$$[\Gamma\{\tfrac{1}{2}(\sigma+\mu-\delta+\nu_1+\nu_2+1)\}]^{-1}$$

$$F_4\Big[\tfrac{1}{2}(\sigma+\delta-\mu+\nu_1+\nu_2),\ \tfrac{1}{2}(\sigma+\delta+\mu+\nu_1+\nu_2);\ 1+\nu_1,\ 1+\nu_2;$$

$$-\frac{\alpha_1^2}{4(b+2\sqrt{ac})},\ -\frac{\alpha_2^2}{4(b+2\sqrt{ac})}\Big],$$

यदि $$R(a)>0,\ R(c)>0,\ R(b+2\sqrt{ac})>0,\ R(\tfrac{1}{2}-\delta)>0,$$
$$R(\sigma+\delta+\mu+\nu_1+\nu_2)>0.$$

चूँकि $\alpha_1=\alpha_2$ अतः [5, p. 101(37)] के उपयोग से

$$(9)\qquad F_4[\alpha, \beta; \gamma, \delta; x, x]={}_4F_3\left[\begin{matrix}\alpha, \beta, (\gamma+\delta-1)/2, (\gamma+\delta)/2\\ \gamma, \delta, \gamma+\delta-1\end{matrix}; 4x\right],$$

परिणाम (8) को

$$(10)\quad \int_0^\infty x^{(\delta+\mu+\sigma+\nu_1+\nu_2)/2}\,(\sqrt{(c)}x-\sqrt{a})^{-2\delta}\,(a+bx+cx^2)^{1/2\,(\delta-\mu-\sigma-\nu_1-\nu_2-1)}$$
$${}_4F_3\left[\begin{matrix}\tfrac{1}{2}(\sigma+\delta-\mu+\nu_1+\nu_2), \tfrac{1}{2}(\sigma-\delta+\mu+\nu_1+\nu_2+1), \tfrac{1}{2}(\nu_1+\nu_2+1), \tfrac{1}{2}(\nu_1+\nu_2+2)\\ 1+v_1, 1+v_2, 1+v_1+v_2\end{matrix}; -\frac{\alpha_1^2\, x}{(a+bx+cx^2)}\right]dx$$
$$=\Gamma(\tfrac{1}{2}-\delta)c^{-1/2}\,(b+2\sqrt{ac})^{-(\mu+\delta+\sigma+\nu_1+\nu_2)/2}\,\Gamma\{\tfrac{1}{2}(\sigma+\delta+\mu+\nu_1+\nu_2)\}$$
$$[\Gamma\{\tfrac{1}{2}(\sigma+\mu-\delta+\nu_1+\nu_2+1)\}]^{-1}$$
$${}_4F_3\left[\begin{matrix}\tfrac{1}{2}(\sigma+\delta-\mu+\nu_1+\nu_2), \tfrac{1}{2}(\sigma+\delta+\mu+\nu_1+\nu_2), \tfrac{1}{2}(1+\nu_1+\nu_2), \tfrac{1}{2}(2+\nu_1+\nu_2)\\ 1+\nu_1, 1+\nu_2, 1+\nu_1+\nu_2\end{matrix}; -\frac{\alpha_1^2}{(b+2\sqrt{ac})}\right],$$

में परिवर्तित कर देता है यदि

$$R(a)>0, R(c)>0, R(b+2\sqrt{ac})>0, R(\tfrac{1}{2}-\delta)>0,$$
$$R(\sigma+\delta+\mu+\nu_1+\nu_2)>0.$$

जब $\alpha_2=0$ तो F_4 ${}_2F_1$ में खण्डित होता है और (8) से हमें

$$(11)\qquad \int_0^\infty x^{(\delta+\mu+\sigma+\nu_1)/2}\,(\sqrt{(c)}x-\sqrt{a})^{-2\delta}\,(a+bx+cx^2)^{(\delta-\mu-\sigma-\nu_1-1)/2}$$

$$_2F_1\left[\tfrac{1}{2}(\sigma+\delta-\mu+\nu_1),\ \tfrac{1}{2}(\sigma-\delta+\mu+\nu_1+1);\ 1+\nu_1;\ -\frac{a_1{}^2 x}{4(a+bx+cx^2)}\right] dx$$

$$=\Gamma(\tfrac{1}{2}-\delta)\, c^{-1/2}(b+2\sqrt{ac})^{-(\mu+\delta+\sigma+\nu_1)/2}\,\Gamma\{\tfrac{1}{2}(\sigma+\delta+\mu+\nu_1)\}$$

$$[\Gamma\{\tfrac{1}{2}(\sigma+\mu-\delta+\nu_1+1)\}]^{-1}$$

$$_2F_1\left[\tfrac{1}{2}(\sigma+\delta+\nu_1-\mu),\ \tfrac{1}{2}(\sigma+\delta+\nu_1+\mu);\ 1+\nu_1;\ -\frac{a_1{}^2}{4(b+2\sqrt{ac})}\right],$$

प्राप्त होता है यदि

$$R(a)>0,\ R(c)>0, R(b+2\sqrt{ac})>0, R(\tfrac{1}{2}-\delta)>0,\ R(\sigma+\delta+\mu+\nu_1)>0.$$

जब $\delta=0,\ a_1=2,$ तो (11) से सुपरिचित परिणाम [8, p 21 (6)] की प्राप्ति होती है।

प्रथम प्रमेय की उपप्रमेय

$\mu=\delta=-1/2,$ होने पर प्रमेय (4) निम्नांकित क्रियात्मक रूप धारण कर लेता है

$$(12)\qquad \int_0^\infty x^{-1/2}(\sqrt{(c)}x-\sqrt{a})(a+bx+cx^2)^{-1/2}L\left\{f(t);\ 2\ \sqrt{\left(\frac{a+bx+cx^2}{x}\right)}\right\} dx$$

$$=c^{-1/2}L\{t^{-1}f(t);\ 2(b+2\sqrt{ac})^{1/2}\},$$

यदि $R(a)>0,\ R(c)>0,\ R(b+2\sqrt{ac})>0, R(\eta)>0$ जहाँ $f(t)=0(t^\eta)$, यदि t छोटा हो।

उदाहरण 3.

(12) में $f(t)=t^\sigma \prod_{i=1}^{r} [\mathcal{J}_{\nu i}(a_i t^{1/2})]$, मानने पर तथा [6, p. 187 (43)] का उपयोग करने पर

$$(13)\qquad \int_0^\infty x^{\sigma/2+1/4 \sum_{i=1}^{r} \nu_i}(\sqrt{(c)}x-\sqrt{a})(a+bx+cx^2)^{-\sigma/2-1/4\sum_{i=1}^{r}\nu_i-1}$$

$$\psi_2\left[\sigma+1+\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}\nu_i;\ 1+\nu_1,\ \ldots,\ 1+\nu_r;-\frac{\alpha_1^2}{8}\sqrt{\left(\frac{x}{a+bx+cx^2}\right)},\ \ldots,\right.$$

$$\left.-\frac{\alpha_r^2}{8}\sqrt{\left(\frac{x}{a+bx+cx^2}\right)}\right]dx$$

$$=2c^{-1/2}(b+2\sqrt{ac})^{-\sigma/2-1/4}\sum_{i=1}^{r}(\sigma+\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}\nu_i)^{-1}.$$

$$\psi_2\left[\sigma+\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}\nu_i;\ 1+\nu_1,\ \ldots,\ 1+\nu_r;-\frac{\alpha_1^2}{8(b+2\sqrt{ac})^{1/2}},\ \ldots,-\frac{\alpha_r^2}{8(b+2\sqrt{(ac)^{1/2}}}\right],$$

$R(a)>0,\ R(c)>0,\ R\{b+2\sqrt{(ac)}\}>0,\ R(\sigma+\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}\nu_i)>0$ के लिये विहित है।

जब $\alpha_1=\alpha_2,\ \alpha_3=\ldots=\alpha_r=0$, तो [4, p.124(66)] का व्यवहार करने पर निम्नांकित प्राप्त होगा :

$$\psi_2(a;\ c,\ c';\ x,\ x)={}_3F_3\left[\begin{matrix}a,\ \tfrac{1}{2}(c+c'-1),\ \tfrac{1}{2}(c+c')\\ c,\ c',\ c+c'-1\end{matrix};\ 4x\right]. \tag{14}$$

$$\int_0^\infty x^{\sigma/2+\nu_1/4+\nu_2/4}(\sqrt{cx}-\sqrt{a})(a+bx+cx^2)^{-\sigma/2-\nu_1/4-\nu_2/4-1} \tag{15}$$

$${}_3F_3\left[\begin{matrix}\sigma+1+\nu_1/2+\nu_2/2,\ \tfrac{1}{2}(\nu_1+\nu_2+1),\ \tfrac{1}{2}(\nu_1+\nu_2+2)\\ 1+\nu_1,\ 1+\nu_2,\ 1+\nu_1+\nu_2\end{matrix};\right.$$

$$\left.-\frac{\alpha_1^2}{2}\left(\frac{x}{a+bx+cx^2}\right)^{1/2}\right]dx$$

$$=2c^{-1/2}(\sigma+\nu_1/2+\nu_2/2)^{-1}(b+2\sqrt{(ac)}\}^{-\sigma/2-\nu_1/4-\nu_2/4}$$

$${}_3F_3\left[\begin{matrix}\sigma+\nu_1/2+\nu_2/2,\ \tfrac{1}{2}(\nu_1+\nu_2+1),\ \tfrac{1}{2}(\nu_1+\nu_2+2)\\ 1+\nu_1,\ 1+\nu_2,\ 1+\nu_1+\nu_2\end{matrix};-\frac{\alpha_1^2}{2(b+2\sqrt{ac})^{1/2}}\right],$$

यदि $R(a)>0,\ R(c)>0,\ R(b+2\sqrt{ac})>0,\ R(\sigma+\nu_1/2+\nu_2/2)>0$

जब $\alpha_2 = \ldots = \alpha_r = 0$ तो (13)

$$\int_0^\infty x^{\sigma/2+\nu_1/4}(\sqrt{(cx)}-\sqrt{a})(a+bx+cx^2)^{-\sigma/2-\nu_1/4-1} \tag{16}$$

$${}_1F_1\left[\sigma+1+\nu_1/2;\ 1+\nu_1;\ -\frac{\alpha_1^2}{8}\left(\frac{x}{a+bx+cx^2}\right)^{1/2}\right]dx$$

$$=2c^{-1/2}(\sigma+\nu_1/2)^{-1}(b+2\sqrt{ac})^{-\sigma/2-\nu_1/4}$$

$${}_1F_1\left[\sigma+\nu_1/2;\ 1+\nu_1;\ -\frac{\alpha_1^2}{8(b+2\sqrt{ac})^{1/2}}\right],$$

में परिवर्तित हो जाता है यदि

$$R(a)>0,\ R(c)>0,\ R(b+2\sqrt{ac})>0,\ R(\sigma+\nu_1/2)>0.$$

परिणाम [14, p. 12]

$${}_1F_1(a; 2a; x)=\Gamma(a+\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{4}x)^{1/2-a}e^{x/2}I_{a-1/2}(\tfrac{1}{2}x), \tag{17}$$

के उपयोग करने पर (16) निम्नांकित रोचक परिणामों में परिवर्तित हो जाता है यदि क्रमशः

$$\sigma=\tfrac{1}{2} \quad \text{तथा} \quad \sigma=-\tfrac{1}{2}$$

$$\int_0^\infty x^{\nu_1/4+1/4}(\sqrt{(c)}x-\sqrt{a})(a+bx+cx^2)^{-\nu_1/4-5/4} \tag{18}$$

$${}_1F_1\left[\nu_1/2+3/2;\ 1+\nu_1;-\frac{\alpha_1^2}{8}\left(\frac{x}{a+bx+cx^2}\right)^{1/2}\right]dx$$

$$=2^{2+5\nu_1/2}c^{-1/2}\alpha_1^{-\nu_1}(b+2\sqrt{ac})^{-1/4}(1+\nu_1)^{-1}\Gamma(\nu_1/2+1)$$

$$\exp\left\{-\frac{\alpha_1^2}{16(b+2\sqrt{ac})^{1/2}}\right\}I_{\nu_1/2}\left\{\frac{\alpha_1^2}{16(b+2\sqrt{ac})^{1/2}}\right\}$$

यदि $\quad R(a)>0,\ R(c)>0,\ R(b+2\sqrt{ac})>0,\ R(1+\nu_1)>0.$

$$\int_0^\infty x^{-1/4}(\sqrt{(c)}x-\sqrt{a})(a+bx+cx^2)^{-3/4} \tag{19}$$

$$\exp\left\{-\frac{\alpha_1^2}{16}\left(\frac{x}{a+bx+cx^2}\right)^{1/2}\right\} I_{\nu_1/2}\left\{\frac{\alpha_1^2}{16}\left(\frac{x}{a+bx+cx^2}\right)^{1/2}\right\} dx$$

$$=2^{2-5\nu_1/2}\, c^{-1/2}\, \alpha_1^{\nu_1}(b+2\sqrt{ac})^{1/4-\nu_1/4}(\nu_1-1)^{-1}[P(1+\nu_{1/2})]^{-1}$$

$$_1F_1\left[\nu_{1/2}-\tfrac{1}{2};\, 1+\nu_1;-\frac{\alpha_1^2}{8(b+2\sqrt{ac})^{1/2}}\right],$$

यदि $R(a)>0,\ R(c)>0,\ R(b+2\sqrt{ac})>0,\ R(\nu_1-1)>0.$

जब $\sigma=1,\ \nu_1=\nu_2,\ \alpha_3=\ldots=\alpha_r=0$ तो (13) का रूप

(20) $$\int_0^\infty x^{1/2+\nu_1/2}\{\sqrt{(c)}x-\sqrt{(a)}\}(a+bx+cx^2)^{-3/2-\nu_1/2}$$

$$\psi_2\left[2+\nu_1;1+\nu_1;-\frac{\alpha_1^2}{8}\left(\frac{x}{a+bx+cx^2}\right)^{1/2},-\frac{\alpha_2^2}{8}\left(\frac{x}{a+bx+cx^2}\right)^{1/2}\right]dx$$

$$=2^{1+3\nu_1}C^{-1/2}(\alpha_1\alpha_2)^{-\nu_1}\{b+2\sqrt{(ac)}\}^{-1/2}(1+\nu_1)^{-1}\Gamma(1+\nu_1)$$

$$\exp\left\{-\frac{\alpha_1^2+\alpha_2^2}{8\{b+2\sqrt{(ac)}\}^{1/2}}\right\} I_{\nu_1}\left\{\frac{\alpha_1\alpha_2}{4\{b+2\sqrt{(ac)}\}^{1/2}}\right\},$$

होगा यदि $R(a)>0,\ R(c)>0,\ R\{b+2\sqrt{(ac)}\}>0,\ R(1+\nu_1)>0;$

परिणाम [4, p. 126]

(21) $\psi_2(c;c,c;x,y)=\Gamma(c)(xy)^{(1-c)/2}e^{x+y}I_{c-1}\{2\sqrt{(xy)}\}$ का उपयोग किया जाय।

पुनः यदि $\sigma=0,\ \nu_1=\nu_2,\ \alpha_3=\ldots=\alpha_r=0,$ तो (21) के प्रयोग करने से (13) निम्नांकित परिणाम में रूपान्तरित हो जावेगा

(22) $$\int_0^\infty\{\sqrt{(c)}x-\sqrt{(a)}\}(a+bx+cx^2)^{-1}\exp\left\{-\frac{\alpha_1^2+\alpha_2^2}{8}\left(\frac{x}{a+bx+cx^2}\right)^{1/2}\right\}$$

$$I_{\nu_1}\left\{\frac{\alpha_1\alpha_2}{4}\left(\frac{x}{a+bx+cx^2}\right)^{1/2}\right\}dx$$

$$=2^{1-3\nu_1}c^{-1/2}(\alpha_1\alpha_2)^{\nu_1}\{b+2\sqrt{(ac)}\}^{-\nu_1/2}\nu_1^{-1}[\Gamma(1+\nu_1)]^{-1}$$

$$\psi_2\left[\nu_1; 1+\nu_1, 1+\nu_1; -\frac{a_1^2}{8\{b+2\sqrt{(ac)}\}^{1/2}}, -\frac{a_2^2}{8\{b+2\sqrt{(ac)}\}^{1/2}}\right],$$

यदि $R(a)>0, R(c)>0, R\{b+2\sqrt{(ac)}\}>0, R(\nu_1)>0.$

3. जो द्वितीय प्रमेय सिद्ध की जानी है वह है

$$(23)\quad \int_0^\infty x^{\mu-1/2}\{\sqrt{(c)}x-\sqrt{(a)}\}(a+bx+cx^2)^{-\mu-1/2}$$

$$K_{\mu+1}\left\{f(t); 2\left(\frac{a+bx+cx^2}{x}\right)\right\}dx$$

$$=2^{-1}c^{-1/2}\{b+2\sqrt{(ac)}\}^{-\mu-1/2}K_\mu[t^{-1}f(t); 2\{b+2\sqrt{(ac)}\}],$$

यदि $R(a)>0,\ R(c)>0,\ R\{b+2\sqrt{(ac)}\}>0,\ R(\eta\pm\mu+\frac{1}{2})>0$

जहां $f(t)=O(t^\eta)$ यदि t छोटा है।

उपपत्ति : यदि हम (5) के बजाय निम्नांकित परिणाम [13] का उपयोग करें तो इसकी उपपत्ति (4) के लिये दी गई उपपत्ति के ही समान होगी।

$$(24)\quad \int_0^\infty x^{\mu-1}\{\sqrt{(c)}\ x-\sqrt{(a)}\}(a+bx+cx^2)^{-\mu}K_{\mu+1}\left\{2\left(\frac{a+bx+cx^2}{x}\right)\right\}dx$$

$$=2^{-1}c^{-1/2}\{b+2\sqrt{(ac)}\}^{-\mu}K_\mu[2\{b+2\sqrt{(ac)}\}],$$

यदि $R(a)>0,\ R(c)>0.$

उदाहरण 1.

$$f(t)=t^\sigma H_{l,q}^{m,n}\left[zt^\rho\middle|\begin{matrix}(a_1,e_1), \ldots, (a_l,e_l)\\(b_1,f_1)\ \ldots, (b_q,f_q)\end{matrix}\right]$$

मानने पर [9, p. 99 (6) का उपयोग करने पर (23) से निम्नांकित परिणाम प्राप्त होगा :

$$(25)\quad \int_0^\infty x^{\mu+\sigma+1/2}\{\sqrt{(c)}\ x-\sqrt{(a)}\}(a+bx+cx^2)^{-\mu-\sigma-3/2}$$

$$H_{l+2,q}^{m,n+2}\left[z\left(\frac{x}{a+bx+cx^2}\right)^\rho\middle|\begin{matrix}\frac{1}{2}(-\sigma-\mu-\frac{1}{2}, \rho), \frac{1}{2}(-\sigma+\mu+\frac{3}{2}, \rho), (a_1 c_1), \ldots, (a_l, e_l)\\(b_1,f_1), \ldots, (b_q,f_q)\end{matrix}\right]dx$$

$$=2^{-1}c^{-1/2}(b+2\sqrt{ac})^{-\mu-\sigma-1/2}H_{l+2,q}^{m,n+2}\Big[z(b+2\sqrt{ac})^{-\rho}$$

$$\times\Big|\begin{matrix}(-\sigma/2-\mu/2+3/4,\ \rho/2),(-\sigma/2+\mu|2+3/4,\ \rho/2),\ (a_1,e_1),\ \ldots,\ (a_l,e_l)\\ (b_1,f_1),\ \ldots,\ (b_q,f_q)\end{matrix}\Big],$$

$R(a)>0,\ R(c)>0,\ R(b+2\sqrt{ac})>0,\ \rho>0,\ 0\leqslant m\leqslant q,\ 0\leqslant n\leqslant l,\ \lambda>0,$

$|agz|<\frac{\lambda\pi}{2}$ के लिये विहित है जहाँ $\lambda\equiv\sum_{j=1}^{n} e_j-\sum_{j=n+1}^{l} e_j+\sum_{f=1}^{m}f_j-\sum_{j=m+1}^{q} f_j+\rho$ तथा

$R(\mu+\sigma+1/2+\rho\min\frac{b_h}{f_h})>0,\ h=1,\ \ldots,\ m.$

उदाहरण 2. यदि हम

$f(t)=t^{\sigma-1}\prod_{i=1}^{r}[J\nu_i(a_it)]$, मानें तो परिणाम [12, p. 162] तथा प्रमेय (23) के उपयोग से हमें

$$(26)\qquad \int_0^\infty x^{\mu+\sigma+\sum_{i=1}^{r}\nu_i-1/2}(\sqrt{(cx)}-\sqrt{a})(a+bx+cx^2)^{\mu-\sigma-\sum_{i=1}^{r}\nu_i-1/2}$$

$$F_c\Big[\tfrac{1}{2}(\sigma-\mu+\sum_{i=1}^{r}\nu_i-1/2),\ \tfrac{1}{2}(\sigma+\mu+\sum_{i=2}^{r}\nu_i+3/2);\ 1+\nu_1,\ \ldots,\ 1+\nu_r;$$

$$-\frac{a_1{}^2x^2}{4(a+bx+cx^2)^2},\ \ldots,\ -\frac{a_r{}^2x^2}{4(a+b\bar{x}+cx^2)^2}\Big]\,dx$$

$$=c^{-1/2}(b+2\sqrt{ac})^{-\mu-\sigma-\sum_{i=1}^{r}\nu_i+1/2}(\sigma+\mu+\sum_{i=1}^{r}\nu_i-1/2)^{-1}$$

$$F_c\Big[\tfrac{1}{2}(\sigma-\mu+\sum_{i=1}^{r}\nu_i-1/2),\ \tfrac{1}{2}(\sigma+\mu+\sum_{i=1}^{r}\nu_i-1/2);\ 1+\nu_i,\ \ldots,\ 1+\nu_r;$$

$$-\frac{a_1{}^2}{4\{b+2\sqrt{(ac)}\}^2},\ \ldots,\ -\frac{a_r{}^2}{4(b+2\sqrt{ac})^2}\Big],$$

मिलेगा जो $R(a)>0, R(c)>0, R(b+2\sqrt{ac})>0,$

$R(\mu+\sigma+\sum_{i=1}^{r} \nu_i-1/2)>0$ के लिये विहित है।

यदि $r=2$, तो यह

$$(27) \qquad \int_0^\infty x^{\mu+\sigma+\nu_1+\nu_2-1/2}(\sqrt{(c)}x-\sqrt{a})(a+bx+cx^2)^{-\mu-\sigma-\nu_1-\nu_2-1/2}$$

$$F_4\Big[\tfrac{1}{2}(\sigma-\mu-\tfrac{1}{2}+\nu_1+\nu_2),\ \tfrac{1}{2}(\sigma+\mu+\tfrac{3}{2}+\nu_1+\nu_2);\ 1+\nu_1,\ 1+\nu_2;$$

$$-\frac{\alpha_1{}^2x^2}{4(a+bx+cx^2)^2},\ -\frac{\alpha_2{}^2x^2}{4(a+bx+cx^2)^2}\Big]\,dx$$

$$=c^{-1/2}(b+2\sqrt{ac})^{-\mu-\sigma-\nu_1-\nu_2+1/2}(\sigma+\mu+\nu_1+\nu_2-\tfrac{1}{2})^{-1}$$

$$F_4\Big[\tfrac{1}{2}(\sigma-\mu-\tfrac{1}{2}+\nu_1+\nu_2),\ \tfrac{1}{2}(\sigma+\mu-\tfrac{1}{2}+\nu_1+\nu_2);\ 1+\nu_1,\ 1+\nu_2;$$

$$-\frac{\alpha_1{}^2}{4(b+2\sqrt{ac})^2},\ -\frac{\alpha_2{}^2}{4(b+2\sqrt{ac})^2}\Big],$$

में रूपान्तरित होगा यदि

$R(a)>0,\ R(c)>0,\ R\{b+2\sqrt{(ac)}\}>0,\ R(\mu+\sigma+\nu_1+\nu_2-\tfrac{1}{2})>0.$

$\alpha_2=0$, होने पर (27) से

$$(28) \qquad \int_0^\infty x^{\mu+\sigma+\nu_1-1/2}(\sqrt{c}x-\sqrt{a})(a+bx+cx^2)^{-\mu-\sigma-\nu_1-1/2}$$

$${}_2F_1\Big[\tfrac{1}{2}(\sigma-\mu+\nu_1-\tfrac{1}{2}),\ \tfrac{1}{2}(\sigma+\mu+\nu_1+\tfrac{3}{2});\ 1+\nu_1\ -\frac{\alpha_1{}^2x^2}{4(a+bx+cx^2)^2}\Big]\,dx$$

$$=c^{-1/2}(b+2\sqrt{ac})^{-\mu-\sigma-\nu_1+1/2}(\mu+\sigma+\nu_1-\tfrac{1}{2})^{-1}$$

$${}_2F_1\Big[\tfrac{1}{2}(\sigma-\mu+\nu_1-\tfrac{1}{2}),\ \tfrac{1}{2}(\sigma+\mu+\nu_1-\tfrac{1}{2});\ 1+\nu_1;\ -\frac{\alpha_1{}^2}{4(b+2\sqrt{ac})^2}\Big],$$

प्राप्त होगा यदि

$$R(a)>0,\ R(c)>0,\ R(b+2\sqrt{ac})>0,\ R(\mu+\sigma+\nu_1-\tfrac{1}{2})>0.$$

जब $\alpha_1=\alpha_2$, तो (9) के व्यवहार करने पर (27) निम्नांकित परिणाम में परिवर्तित हो जावेगा :

$$(29)\qquad \int_0^\infty x^{\mu+\sigma+\nu_1+\nu_2-1/2}\,(\sqrt{(c)}x-\sqrt{a})(a+bx+cx^2)^{-\mu-\sigma-\nu_1-\nu_2-1/2}$$

$${}_4F_3\left[\begin{matrix}\tfrac{1}{2}(\sigma-\mu+\nu_1+\nu_2-\tfrac{1}{2}),\ \tfrac{1}{2}(\sigma+\mu+\nu_1+\nu_2+\tfrac{3}{2}),\ \tfrac{1}{2}(\nu_1+\nu_2+1),\ \tfrac{1}{2}(\nu_1+\nu_2+2);\\ 1+\nu_1,\ 1+\nu_2,\ 1+\nu_1+\nu_2\end{matrix}\right.$$

$$\left. -\frac{\alpha_1{}^2x^2}{(a+bx+cx^2)^2}\right]dx$$

$$=c^{-1/2}(b+2\sqrt{ac})^{-\mu-\sigma-\nu_1-\nu_2+1/2}(\sigma+\mu+\nu_1+\nu_2-\tfrac{1}{2})^{-1}$$

$${}_4F_3\left[\begin{matrix}\tfrac{1}{2}(\sigma-\mu+\nu_1+\nu_2-\tfrac{1}{2}),\ \tfrac{1}{2}(\sigma+\mu+\nu_1+\nu_2-\tfrac{1}{2}),\ \tfrac{1}{2}(\nu_1+\nu_2+1),\ \tfrac{1}{2}(\nu_1+\nu_2+2);\\ 1+\nu_1,\ 1+\nu_2,\ 1+\nu_1+\nu_2\end{matrix}\right.$$

$$\left. -\frac{\alpha_1{}^2}{(b+2\sqrt{ac})^2}\right],$$

यदि $\quad R(a)>0,\ R(c)>0,\ R(b+2\sqrt{ac})>0,\ R(\mu+\sigma+\nu_1+\nu_2-\tfrac{1}{2})>0.$

द्वितीय प्रमेय की उपप्रमेय

$\mu=-\frac{1}{2}$ होने पर यह लैपलास परिवर्त में निम्नांकित प्रमेय के रूप में परिवर्तित होगी :

$$(30)\qquad \int_0^\infty x^{-1}(\sqrt{cx}-\sqrt{a})L\left\{f(t)\,;\,2\left(\frac{a+bx+cx^2}{x}\right)\right\}dx$$

$$=2^{-1}c^{-1/2}L\{t^{-1}f(t)\,;\,2(b+2\sqrt{ac})\},$$

यदि $R(a)>0,\ R(c)>0,\ R(b+2\sqrt{ac})>0, R(\eta)>0$ जहाँ $f(t)=0(t^\eta)$ यदि t छोटा हो ।

उदाहरण 3.

माना कि $\qquad f(t)=t^\sigma \prod_{i=1}^{r}[\mathcal{J}\nu_i(\alpha_i t^{1/2})],$

तो [6, p. 187] के व्यवहार से (30) से निम्नांकित परिणाम प्राप्त होगा :—

$$(31)\quad \int_0^\infty x^{\sigma+1/2\sum_{i=1}^{r}}(\sqrt{(c)}x-\sqrt{a})(a+bx+cx^2)^{-\sigma-1-1/2\sum_{i=1}^{r}\nu_i}$$

$$\psi_2\Big[\sigma+1+\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}\nu_i;\ 1+\nu_1,\ \ldots,\ 1+\nu_r;$$

$$-\frac{\alpha_1^2 x}{8(a+bx+cx^2)},\ \ldots,\ -\frac{\alpha_r^2 x}{8(a+bx+cx^2)}\Big]dx$$

$$=c^{-1/2}\{b+2\sqrt{(ac)}\}^{-\sigma-1/2\sum_{i=1}}(\sigma+\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}\nu_i)^{-1}$$

$$\psi_2\Big[\sigma+\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}\nu_i;\ 1+\nu_1,\ \ldots,\ 1+\nu_r;$$

$$-\frac{\alpha_1^2}{8\{b+2\sqrt{(ac)}\}},\ \ldots,\ -\frac{\alpha_r^2}{8\{b+2\sqrt{(ac)}\}}\Big],$$

$R(a)>0,\ R(c)>0;\ R\{b+2\sqrt{(ac)}\}>0,\ R(\sigma+\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}\nu_i)>0$ के लिये विहित है।

जब $\alpha_1=\alpha_2,\ \alpha_3=\ldots=\alpha_r=0$ तो (14) के उपयोग से (31) से निम्नांकित परिणाम मिलेगा :—

$$(32)\quad \int_0^\infty x^{\sigma+\nu_1/2+\nu_2/2}\{\sqrt{(c)}x-\sqrt{(a)}\}(a+bx+cx^2)^{-\sigma-1-\nu_1/2-\nu_2/2}$$

$${}_3F_3\left[\begin{matrix}\sigma+1+\nu_{1/2}+\nu_{2/2},\ \tfrac{1}{2}(\nu_1+\nu_2+1),\ \tfrac{1}{2}(\nu_1+\nu_2+2)\\ 1+\nu_1,\ 1+\nu_2,\ 1+\nu_1+\nu_2\end{matrix};\ -\frac{\alpha_1^2 x}{2(a+bx+cx^2)}\right]dx$$

$$=c^{-1/2}\{b+2\sqrt{(ac)}\}^{-\sigma-\nu_1/2-\nu_2/2}(\sigma+\nu_{1/2}+\nu_{2/2})^{-1}$$

$${}_3F_3\left[\begin{matrix}\sigma+\nu_{1/2}+\nu_{2/2},\ \tfrac{1}{2}(\nu_1+\nu_2+1),\ \tfrac{1}{2}(\nu_1+\nu_2+2)\\ 1+\nu_1,\ 1+\nu_2,\ 1+\nu_1+\nu_2\end{matrix};\ -\frac{\alpha_1^2}{2\{b+2\sqrt{(ac)}\}}\right],$$

यदि $R(a)>0,\ R(c)>0,\ R\{b+2\sqrt{(ac)}\}>0,\ R(\sigma+\nu_{1/2}+\nu_{2/2})>0.$

जब $\alpha_2=\dots=\alpha_r=0$ तो (31)

$$(33)\qquad \int_0^\infty x^{\sigma+\nu_1/2}\{\sqrt{(c)}x-\sqrt{(a)}\}(a+bx+cx^2)^{-\sigma-1-\nu_1/2}$$

$${}_1F_1\left[\sigma+1+v_{1/2};\ \nu_1+1;-\frac{\alpha_1{}^2x}{8(a+bx+cx^2)}\right]dx$$

$$=c^{-1/2}\{b+2\sqrt{(ac)}^{-\sigma-\nu_1/2}(\sigma+\nu_{1/2})^{-1}{}_1F_1\left[\sigma+{}^{\nu}{}_1/2;\ 1+\nu_1;-\frac{\alpha_1{}^2}{8\{b+2\sqrt{(ac)}\}}\right.$$

में रूपान्तरित होगा यदि $R(a)>0, R(c)>0, R\{b+2\sqrt{(ac)}\}>0, R(\sigma+v_{1/2})>0.$

क्रमशः $\sigma=\frac{1}{2}$ तथा $\sigma=-\frac{1}{2}$ होने पर (17) का उपयोग करने पर (33) निम्नांकित परिणाम में परिवर्तित हो जावेगा :

$$(34)\quad \int_0^\infty x^{1/2+\nu_1/2}\{\sqrt{(c)}x-\sqrt{(a)}\}(a+bx+cx^2)^{-3/2-\nu_1/2}{}_1F_1\left[\tfrac{3}{2}+\nu_{1/2};\ 1+\nu_1;\right.$$

$$\left.-\frac{\alpha_1{}^2x}{8(a+bx+cx^2)}\right]dx$$

$$=2^{3\nu_1/2}\pi^{1/2}c^{-1/2}\alpha_1{}^{-\nu_1}\{b+2\sqrt{(ac)}\}^{-1/2}\Gamma(1+\nu_1)[\Gamma\tfrac{3}{2}+\nu_{1/2})]^{-1}$$

$$\exp\left\{-\frac{\alpha_1{}^2}{16\{b+2\sqrt{(ac)}\}}\right\}I_{\nu 1/2}\left\{\frac{\alpha_1{}^2}{16\{b+2\sqrt{(ac)}\}}\right\},$$

यदि $\qquad R(a)>0,\ R(c)>0 R\{b+2\sqrt{(ac)}\}>0,\ R(1+\nu_1)>0.$

$$(35)\quad \int_0^\infty x^{-1/2}\{\sqrt{(c)}x-\sqrt{(a)}\}(a+bx+cx^2)^{-1/2}\exp\left\{-\frac{\alpha_1{}^2x}{16(a+bx+cx^2)}\right\}I\nu_{1/2}$$

$$\times\frac{\alpha_1{}^2x}{16(a+bx+cx^2)}\Big\}dx$$

$$=2^{-3\nu_1/2}\pi^{-1/2}\alpha_1{}^{\nu_1}c^{-1/2}\{b+2\sqrt{(ac)}\}^{1/2-\nu_1/2}\Gamma(\nu_{1/2}-\tfrac{1}{2})[\Gamma(1+\nu_1)]^{-1}$$

$$ {}_1F_1\left[\nu_{1/2}-\tfrac{1}{2};\ 1+\nu_1;-\frac{\alpha_1^2}{8\{b+2\sqrt{(ac)}\}}\right], $$

यदि $R(a)>0,\ R(c)>0,\ R\{b+2\sqrt{(ac)}\}>0,\ R(\nu_1-1)>0.$

(21) के उपयोग से (31) से निम्नांकित परिणाम मिलेंगे यदि क्रमशः $\sigma=0,\ \nu_1=\nu_2,\ \alpha_3=\ldots=\alpha_r=0$ तथा $\sigma=1,\ \nu_1=\nu_2,\ \alpha_3=\ldots=\alpha_r=0$

$$ (36)\quad \int_0^\infty \{\sqrt{(c)}\,x-\sqrt{(a)}\}\,(a+bx+cx^2)^{-1}\exp\left\{-\frac{(\alpha_1^2+\alpha_2^2)x}{8(a+bx+cx^2)}\right\} $$

$$ I_{\nu_1}\left\{\frac{\alpha_1\alpha_2\,x}{4(a+bx+cx^2)}\right\}dx $$

$$ =2^{-3\nu_1}c^{-1/2}\,(\alpha_1\alpha_2)^{\nu_1}\{b+2\sqrt{(ac)}\}^{-\nu_1}\nu_1^{-1}\,[\Gamma(1+\nu_1)]^{-1} $$

$$ \psi_2\left[\nu_1;\ 1+\nu_1,\ 1+\nu_1;-\frac{\alpha_1^2}{8\{b+2\sqrt{(ac)}\}},-\frac{\alpha_2^2}{8\{b+2\sqrt{(ac)}\}}\right] $$

यदि $R(a)>0,\ R(c)>0,\ R\{b+2\sqrt{(ac)}\}>0,\ R(\nu_1)>0.$

$$ (37)\quad \int_0^\infty x^{1+\nu_1}\{\sqrt{(c)}\,x-\sqrt{(a)}\}\,(a+bx+cx^2)^{-\nu_1-2} $$

$$ \psi_2\left[2+\nu_1;\ 1+\nu_1,\ 1+\nu_1;-\frac{\alpha_1^2x}{8(a+bx+cx^2)},-\frac{\alpha_2^2x}{8(a+bx+cx^2)}\right]dx $$

$$ =2^{3\nu_1}c^{-1/2}\,(\alpha_1\alpha_2)^{-\nu_1}\{b+2\sqrt{(ac)}\}^{-1}\,(1+\nu_1)^{-1}\,\Gamma(1+\nu_1) $$

$$ \exp\left\{-\frac{\alpha_1^2+\alpha_2^2}{8\{b+2\sqrt{(ac)}\}}\right\}I_{\nu_1}\left\{\frac{\alpha_1\alpha_2}{4\{b+2\sqrt{(ac)}\}}\right\}, $$

यदि $R(a)>0,\ R(c)>0,\ R\{b+2\sqrt{(ac)}\}>0,\ R(1+\nu_1)>0.$

निर्देश

1. एपेल, पी० तथा काम्पे ड फेरी जे०। Fonctions hypergeometriques et hyperspheriques — Polynomes d' Hermite, गाथियर विलर, पेरिस, 1926.

2. ब्राक्शमा, बी० एल० जे० । Compositio Mathematica, 1963, **15**, 239-241.

3. ब्रामविच, टी० जे० आई० । An Introduction to the Theory of Infinite Series. मैकमिलन, लन्दन, 1931.

4. बर्चनाल, जे०एल० तथा चाण्डी, टी० डब्लू० । क्वार्ट० जर्न० मैथ० आक्सफोर्ड, 1941, **12**, 112-128.

5. बर्चनाल, जे० एल० । क्वार्ट० जर्न० मैथ० आक्सफोर्ड, 1942, **13**, 90-106.

6. एर्डेल्यी, ए० तथा अन्य । *Tables of integral transforms*. भाग I मैग्राहिल न्यूयार्क, 1954.

7. फाक्स, सी० । ट्रांजै० अमे० मैथ० सोसा०, 1961, **98**, 395-429.

8. गुप्ता, के० सी० । साइंटिया, 1963-64, **9**, 18-24.

9. वही । एनाल्स द ला सोसा० साइं, ब्रुसेल्स, 1965, **79**, 97-106.

10. माइजर, सी० एस० । Proc. Kon. Ned. Akad. Wet., 1946, **49**(**10**), 227-237.

11. सक्सेना, आर० के० । प्रोसी० नेश० इंस्टी० साइंस, इंडिया, 1960, **26**, 661-664.

12. वही । Monatshefte fur Mathematik, 1966, **70**, 161-163.

13. शर्मा, बी० एल० । (प्रकाशनार्थ प्रेषित)

14. स्लेटर, एल० जे० । Confluent hypergeometric functions, कैम्ब्रिज यूनिवर्सिटी प्रेस, 1960.

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका
1968, **11**, 31-38

VIJNANA PARISHAD
ANUSANDHAN PATRIKA
1968, **11**, 31-38

G - फलनों के गुणनफल वाली कतिपय श्रेणियों का संकलन

एस० डी० बाजपेयी

गणित विभाग, श्री जी० एस० टेक्नालाजिकल इंस्टीच्यूट, इंदौर

[प्राप्त—नवम्बर 21, 1966]

सारांश

इस शोध पत्र में हमने कतिपय G-फलनों के समाकलों की स्थापना उनके प्राचलों के परिपेक्ष्य में की है और उनका उपयोग दो G-फलनों के गुणनफल वाली कतिपय श्रेणियों के योग करने में किया है।

Abstract

Summation of some series of products of G-functions. *By* S. D. Bajpai, Department of Mathematics, Shri G. S. Technological Institute, Indore (M. P).

In this paper we have established some integrals of G-functions with respect to their parameters, and employed them to sum certain series of products of two G-functions.

अगले वर्णन में δ एक धनात्मक पूर्णांक है तथा $\triangle(\delta, \alpha)$ संकेतों द्वारा $\frac{\alpha}{\delta}, \frac{\alpha+1}{\delta}, \ldots \frac{\alpha+\delta-1}{\delta}$ प्राचलों की श्रेणी का बोध होता है।

उपपत्तियों के लिये निम्नांकित सार्वीकरणों की आवश्यकता होगी जो ज्ञात परिणामों [2, p. 417, (1)] तथा [2, p. 419, (5)] के रूप में हैं और जिन्हें सरलता से व्युत्पन्न किया जा सकता है।

$$(1.1) \qquad \int_0^1 x^{-\alpha}(1-x)^{\alpha-\beta-1}\, G_{p,\, q}^{m,\, n}\left(zx^{\delta}\middle|\begin{matrix}a_1,\ldots,a_p\\ b_1,\ldots,b_q\end{matrix}\right)dx$$

$$=\Gamma(\alpha-\beta)\,\delta^{\beta-\alpha}G_{p+\delta,\, q+\delta}^{m,\, n+\delta}\left(z\middle|\begin{matrix}\triangle(\delta,\alpha), a_1,\ldots,a_p\\ b_1,\ldots,b_q, \triangle(\delta,\beta)\end{matrix}\right),$$

जहाँ $p+q<2(m+n)$, $|\arg z|<(m+n-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q)\pi$, $Re(\alpha-\beta)>0$,
$Re(\delta b_j-\alpha)>-1, j=1, 2,\ldots, m.$

$$(1.2) \qquad \int_0^\infty x^{-\rho} e^{-\beta x} G_{p, q}^{m, n}\left(zx^\delta \middle| \begin{matrix} a_1,\ldots, a_p \\ b_1,\ldots, b_q \end{matrix}\right) dx$$

$$=(2\pi)^{1/2-1/2\delta}\ \delta^{1/2-\rho}\ \beta^{\rho-1}\ G_{p+\delta, q}^{m, n+\delta}\left(z(\delta/\beta)^\delta \middle| \begin{matrix} \Delta(\delta, \rho), a_1,\ldots, a_p \\ b_1,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, b_q \end{matrix}\right),$$

जहाँ $p+q<2(m+n)$, $|\arg z|<(m+n-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q)\pi$, $Re(\delta b_j-\rho)>-1$,
$j=1, 2,\ldots, m.$

2. (*i*) **प्रथम समाकल**—यदि $\delta m+1>0$, $|\arg z|<(\delta m+1)\frac{1}{2}\pi$,

$Re(a_r-b_r)>0$, $(r=1, 2,\ldots, q)$, $Re[\delta(\frac{1}{2}\pm\mu-\lambda)-a_r]>-1$,

$(r=1, 2,\ldots, q+m)$, $Re(K+\lambda)<0$, $Re\lambda>|Re\,\mu|-\frac{1}{2}$,

$$(2.1) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_L \Gamma(s-k-\lambda)\Gamma(\lambda+\mu-s+\tfrac{1}{2})\Gamma(\lambda-\mu-s+\tfrac{1}{2})z^s\delta^{m\delta s}$$

$$\times G_{\delta(q+m)+1, \delta q+2}^{2, \delta(q+m)}\left(z\delta^m \middle| \begin{matrix} \Delta(\delta,a_1-\delta s), \ldots, \Delta(\delta,a_{q+m}-\delta s), 1+k-\lambda \\ \frac{1}{2}+\mu-\lambda, \frac{1}{2}-\mu-\lambda, \Delta(\delta,b_1-\delta s), \ldots, \Delta(\delta,b_q-\delta s) \end{matrix}\right) ds$$

$$=\Gamma(\tfrac{1}{2}-k-\mu)\Gamma(\tfrac{1}{2}-k+\mu)\, 2^{\sum_{r=1}^{q} b_r-\sum_{r=1}^{q+m} a_r+(m+1)/2}\,(2\pi)^{-(\delta m+1)/2}$$

$$\times G_{2\delta(q+m)+2, 2\delta+4}^{4, 2\delta(q+m)}\left(\frac{z^2}{4}(2\delta)^{2\delta m} \middle| \begin{matrix} \Delta(2\delta, a_1), \ldots, \Delta(2\delta,a_{q+m}) 1+k, 1-k \\ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\mu, \frac{1}{2}-\mu, \Delta(2\delta, b_1),\ldots, \Delta(2\delta, b_q) \end{matrix}\right),$$

समाकलन का पथ टेढ़ेमेढ़े रास्तों (लूप) सहित [2, p. 302, 29] की भाँति है, यदि आवश्यकता हो जिससे कि $\lambda+\mu+\frac{1}{2}$ तथा $\lambda-\mu+\frac{1}{2}$ कन्टूर के दाहिनी ओर रहें।

उपपत्ति—(1·1) तथा (1·2) से (2.1) के दाहिने पक्ष को निम्नांकित रूप में रखा जा सकता है :

$$\frac{1}{2\pi i}\int \Gamma(s-k-\lambda)\Gamma(\lambda+\mu-s+\tfrac{1}{2})\Gamma(\lambda-\mu-s+\tfrac{1}{2})z^s\delta^{m\delta s}$$

$$\times\left[\prod_{r=1}^{q}\Gamma(a_r-b_r)\delta^{b_r-a_r}\right]^{-1}\prod_{r=1}^{q}\int_0^1 x_r^{-a_r+\delta_s}(1-x_r)^{a_r-b_r-1}\,dx_r$$

$$\times\left[\prod_{r=q+1}^{q+m}(2\pi)^{1/2-\delta/2}\,\delta^{1/2-a_r+\delta_s}\right]^{-1}\prod_{r=q+1}^{q+m}\int_0^\infty x_r^{-a_r+\delta_s}e^{-x_r}\,dx_r$$

$$\times G_{1,2}^{2,0}\left(z(x_1\ldots x_{q+m})^\delta\,\middle|\,\begin{matrix}1+k-\lambda\\ \frac{1}{2}+\mu-\lambda,\ \frac{1}{2}-\mu-\lambda\end{matrix}\right)ds.$$

यहाँ पर प्रथम समाकल को अंत में रखकर समाकलन के क्रम को परिवर्तित करने पर

$$\left[\prod_{r=1}^{q}\Gamma(a_r-b_r)\delta^{b_r-a_r}\right]^{-1}\prod_{r=1}^{q}\int_0^1 x^{-a_r}(1-x_r)^{a_r-b_r-1}\,dx_r$$

$$\times\left[\prod_{r=q+1}^{q+m}(2\pi)^{1/2-\delta/2}\,\delta^{1/2-a_r}\right]^{-1}\prod_{r=q+1}^{q+m}\int_0^\infty x_r^{-a_r}e^{-x_r}G_{1,2}^{2,0}\left(z(x_1\ldots x_{q+m})^\delta\,\middle|\,\begin{matrix}1+k-\lambda\\ \frac{1}{2}+\mu-\lambda,\ \frac{1}{2}-\mu-\lambda\end{matrix}\right)dx_r$$

$$\times\frac{1}{2\pi i}\int_L\Gamma(s-k-\lambda)\Gamma(\lambda+\mu-s+\tfrac{1}{2})\Gamma(\lambda-\mu-s+\tfrac{1}{2})(x_1\ldots x_{q+m})^{\delta s}z^s\,ds,$$

[2, p. 433, (3)], तथा [2, p. 302, (29)], से प्रतिस्थापित करने पर व्यंजक का रूप

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}-k-\mu)\Gamma(\tfrac{1}{2}-k+\mu)\left[\prod_{r=1}^{q}\Gamma(a_r-b_r)\delta^{b_r-a_r}\right]^{-1}\prod_{r=1}^{q}\int_0^1 x_r^{-a_r}(1-x_r)^{a_r-b_r-1}\,dx_r$$

$$\times\left[\prod_{r=q+1}^{q+m}(2\pi)^{1/2-\delta/2}\,\delta^{1/2-a_r}\right]^{-1}\prod_{r=q+1}^{q+m}\int_0^\infty x^{-a_r}e^{-x_r}W_{-k,\mu}\{z(x_1\cdots x_{q+m})^\delta\}\times W_{k,\mu}\{z(x_1\ldots x_{q+m})^\delta\}\,dx_r.$$

हो जाता है। अब [2, p. 433, (5)] से प्रतिस्थापित करने पर, समाकलन करने पर तथा (1.1) एवं (1.2) का उपयोग करने पर (2.1) सूत्र प्राप्त होता है।

(*ii*) **द्वितीय समाकल**—यदि $\delta m+1>0$, $|\arg z|<(\delta m+1)\frac{1}{2}\pi$, $Re(a_r-b_r)>0$, $(r=1, 2,\ldots, q)$, $Re[\delta(\frac{1}{2}-\lambda+\mu)-a_r]>-1$,

$$(r=1, 2, \ldots, q+m),\ Re(k+\lambda)<0,\ Re\,\lambda>|Re\mu|-\tfrac{1}{2},$$

$$(2.2)\qquad \int_L \Gamma(s-k-\lambda)\Gamma(\lambda+\mu-s+\tfrac{1}{2})\Gamma(\lambda-\mu-s+\tfrac{1}{2})z^s\delta^{m\delta s}$$

$$\times G^{1,\delta(q+m)+1}_{\delta(q+m)+1,\delta q+2}\left(z\delta^{\delta m}\middle|\begin{matrix}1+k-\lambda, \Delta(\delta, a_1-\delta s),\ldots,\Delta(\delta, a_{q+m}-\delta s)\\ \frac{1}{2}+\mu-\lambda, \Delta(\delta, b_1-\delta s),\ldots,\Delta(\delta, b_q-\delta s), \frac{1}{2}+\mu+\lambda\end{matrix}\right)ds$$

$$=\Gamma(\tfrac{1}{2}-k-\mu)\Gamma(\tfrac{1}{2}-k+\mu)2^{\sum_{r=1}^{q} b_r-\sum_{r=1}^{q+m} a_r+(m+1)1/2}(2\pi)^{-(\delta m+1)1/2}$$

$$\times G^{3,2\delta(q+m)+1}_{2\delta(q+m)+2,2\delta q+4}\left(\frac{z^2}{4}(2\delta)^{2\delta m}\middle|\begin{matrix}1+k, \Delta(2\delta, a_1),\ldots, \Delta(2\delta, a_{q+m}),\ 1-k\\ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\mu, \Delta(2\delta, b_1),\ldots, \Delta(2\delta, b_q), \frac{1}{2}-\mu\end{matrix}\right),$$

समाकलन का पथ लूपों सहित [2, p. 302 (29)] की भाँति है, यदि आवश्यक हो कि $\lambda+\mu+\frac{1}{2}$ तथा $\lambda-\mu+\frac{1}{2}$ कंटूर के दाहिनी ओर रहें।

समाकल की स्थापना 2 (i) की ही विधि एवं [2, p. 302, (29)], [2, p. 442, (7)] तथा [2, p. 443, (3)] परिणामों का उपयोग करके की जा सकती है।

(iii) **तृतीय समाकल**—यदि $\delta m+1>0$, $|\arg z|<(\delta m+1)\frac{1}{2}\pi$,

$$Re(a_r-b_r)>0,\ (r=1, 2,\ldots q),\ Re[\delta(\mu-\lambda-\tfrac{1}{2})-a_r]>-1,$$

$$Re[\delta(\tfrac{1}{2}-\lambda-\mu)-a_r]>1, (r=1, 2, \ldots, q+m),\ Re\,\lambda>|Re\,\mu|-\tfrac{1}{2},$$

$$(2.3)\quad \int_L \frac{\Gamma(\lambda+\mu-s+\frac{1}{2})\Gamma(\lambda-\mu-s+\frac{1}{2})}{\Gamma(\lambda-k-s+1)}\,z^s\delta^{m\delta s}$$

$$\times G^{2,\delta(q+m)+1}_{\delta(q+m+1,\delta q+2}\left(z\delta^{\delta m}\middle|\begin{matrix}1-k-\lambda,\ \Delta(\delta, a_1-\delta s),\ \ldots,\ \Delta(\delta, a_{q+m}-\delta s)\\ \frac{1}{2}-\mu-\lambda,\ \mu-\frac{1}{2}-\lambda,\ \Delta(\delta,b_1-\delta s),\ \ldots,\ \Delta(\delta,b_q-\delta_s)\end{matrix}\right)ds$$

$$=\Gamma(\tfrac{1}{2}+\mu+k)\Gamma(\tfrac{1}{2}+k-\mu)2^{\sum_{r=1}^{q} b_r-\sum_{r=1}^{q+m} a_r+(m+1)1/2}(2\pi)^{-(\delta m+1)1/2}.$$

$$\times G^{4,2\delta(q+m)}_{2\delta(q+m)+2,2\delta q+2}$$

$$\times\left(\frac{z^2}{4}(2\delta)^{2\delta m}\middle|\begin{matrix}\Delta(2\delta, a_1), \ldots, \Delta(2\delta, a_{q+m}),\ 1+k,\ 1-k\\ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\mu, \frac{1}{2}-\mu, \Delta(2\delta, b_1), \ldots, \Delta(2\delta, b_q)\end{matrix}\right),$$

समाकलन का पथ लूपों सहित [2, p. 302, (30)] की भाँति है यदि आवश्यक हो कि $\lambda+\mu+\frac{1}{2}$, $\lambda-\mu+\frac{1}{2}$ कन्टूर के दाहिनी ओर हों।

L समाकल की स्थापना 2(i) की ही विधि एवं [2, p. 302, (30)], [2, p. 435, (5)] तथा [2, p. 443, (5)] परिणामों का उपयोग करके की जा सकती है।

(iv) **चतुर्थ समाकल**—यदि $(\delta m+1)>0$, $|\arg z|<(\delta m+1)\frac{1}{2}\pi$,

$Re(a_r-b_r)>0$, $(r=1, 2, \ldots, q)$, $Re[\delta(\mu-\lambda-\frac{1}{2})-a_r]>-1$,

$Re[\delta(\frac{1}{2}-\lambda-\mu)-a_r]>-1$, $(r=1, 2, \ldots, q+m)$, $Re(K+\lambda)<0$

$Re(\lambda+\mu)>-\frac{1}{2}$,

$$(2.4)\quad \int_L \frac{\Gamma(s-k-\lambda)\Gamma(\lambda+\mu-s+\frac{1}{2})}{\Gamma(\mu-\lambda+s+\frac{1}{2})} z^s \delta^{m\delta s}$$

$$\times G^{2,\ \delta(q+m)+1}_{\delta(q+m)+1,\ \delta q+2}$$

$$\times\left(z\delta^{\delta m}\middle|\begin{matrix}1+k-\lambda, \Delta(\delta, a_1-\delta s), \ldots, \Delta(\delta, a_{q+m}-\delta s)\\ \frac{1}{2}-\mu-\lambda, \frac{1}{2}+\mu-\lambda, \Delta(\delta, b_1-\delta s), \ldots, \Delta(\delta, b_q-\delta s)\end{matrix}\right) ds$$

$$=\Gamma(\tfrac{1}{2}-k+\mu)\Gamma(\tfrac{1}{2}-k-\mu)2^{\sum_{r=1}^{q} b_r-\sum_{r=1}^{q+m} a_r+(m+1)/2}(2\pi)^{-(\delta m+1)/2}$$

$$\times G^{3,\ 2\delta(q+m)+1}_{2\delta(q+m)+2,\ 2\delta q+4}\left(\frac{z^2}{4}(2\delta)^{2\delta m}\middle|\begin{matrix}1+k, \Delta(2\delta, a_1), \ldots, \Delta(2\delta, a_{+m}), 1-k\\ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\mu, \Delta(2\delta, b_1), \ldots, \Delta(2\delta, b_q), \frac{1}{2}-\mu\end{matrix}\right)$$

L समाकल का पथ लूपों सहित [2, p. 302, (31)] की भाँति है यदि आवश्यक हो कि $\lambda+\mu+\frac{1}{2}$ कंटूर के दाहिनी ओर रहे।

समाकल की स्थापना 2(i) की ही विधि एवं [2, p. 302], [2, p. 435, (5)] तथा [2, p. 435, (3)] परिणामों का उपयोग करके की जा सकती है।

3. श्रेणी-संकलन (i) **प्रथम श्रेणी** यदि $|\text{amp } z|<\pi$, $Re\, a_1,<1$, $Re\, a_2<1$ $Re\, b_1>0$, $Re\ (b_2>0$, $Re\ (a_2+b_1-b_2)<1$, $Re\ (b_2-a_2)>0$,

$$(3\cdot1)\qquad \sum_{r=0}^{\infty}\frac{\sigma^{2r}}{r!(1+b_1-a_2)_r} G^{2\sigma,\ 2\sigma}_{2\sigma,\ 2\sigma}\left(z\middle|\begin{matrix}\Delta(\sigma, a_1), \Delta(\sigma, a_2)\\ \Delta(\sigma, b_1+r), \Delta(\sigma, b_2)\end{matrix}\right)$$

$$\times G_{2\sigma, 2\sigma}^{2\sigma, \sigma}\left(z\middle|\begin{matrix}\Delta(\sigma, 1+a_2-b_1-b_2), \Delta(\sigma, 1+a_1-b_1-b_2)\\ \Delta(\sigma, 1-b_2-r), \Delta(\sigma, 1-b_1)\end{matrix}\right)$$

$$=(2\pi)^{3\sigma-4}\sigma^{2(a_1+a_2-b_1-b_2)}2^{b_2-a_2}\Gamma(1+b_1-a_2)\Gamma(1-a_1+b_1)\Gamma(1-a_1+b_2)$$

$$\times G_{4, 4}^{4, 2}\left\{ z^{2/\sigma}\middle|\begin{matrix}\Delta(2, 1+a_2-b_2), \dfrac{1+2a_2-b_1-b_2}{2}, \dfrac{3-2a_1+b_1+b_2}{2}\\ 1, \frac{1}{2}, \dfrac{1+b_1-b_2}{2}, \dfrac{1-b_1+b_2}{2}\end{matrix}\right\}$$

उपपत्ति—(3·1) को सिद्ध करने के लिये बाईं ओर [1, p.207, (1)] में से प्रतिस्थापित करके

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\sigma^{2r}}{r!(1+b_1-a_2)_r}\times\frac{1}{2\pi i}\Gamma\int\left[\prod_{i=0}^{\sigma-1}\Gamma\left(\frac{b_1+r+i}{\sigma}-s\right)\left(\frac{b_2+i}{\sigma}-s\right)\right.$$

$$\left.\Gamma\left(1-\frac{a_1+i}{\sigma}+s\right)\Gamma\left(1-\frac{a_2+i}{\sigma}+s\right)\right]z^s ds$$

$$\times\frac{1}{2\pi i}\int_L\left\{\prod_{i=0}^{\sigma-1}\frac{\Gamma\left(\frac{1-b_2+r+i}{\sigma}-\omega\right)\Gamma\left(\frac{1-b_1+i}{\sigma}-\omega\right)\Gamma\left(1-\frac{1+a_2-b_1-b_2+i}{\sigma}+\omega\right)}{\Gamma\left(\frac{1+a_1-b_1-b_2+i}{\sigma}-\omega\right)}\right\}z^{\omega}d\omega$$

प्राप्त किया जाता है। यहाँ S तथा ω को $\frac{s}{\sigma}$ तथा $\frac{\omega}{\sigma}$ द्वारा प्रतिस्थापित करते हुये, गामा फलन के लिये गुणन-सूत्र का उपयोग करके तथा समाकलन एवं संकलन के क्रम को परिवर्तित करने पर व्यंजक निम्न रूप धारण करेगा :

$$(2\pi)^{3(\sigma-1)}\sigma^{2(a_1+a_2-b_1-b_2)}\times\frac{1}{2\pi i}\int_L\Gamma(b_1-s)\Gamma(b_2-s)\Gamma(1-a_1+s)$$

$$\Gamma(1-a_2+s)z^{s/\sigma}ds$$

$$\times\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\Gamma(1-b_2-\omega)\Gamma(1-b_1-\omega)\Gamma(b_1+b_2-a_2+\omega)}{\Gamma(1+a_1-b_1-b_2-\omega)}z^{\omega/\sigma}$$

$${}_2F_1\left(\begin{matrix}b_1-s, 1-b_2-\omega; 1\\ 1+b_1-a_2\end{matrix}\right)d\omega.$$

अब गास-प्रमेय का व्यवहार करके तथा $a_1=1+K+\lambda$, $a_2=\frac{3}{2}-\gamma+\lambda+\mu$, $b_1=\lambda+\mu+\frac{1}{2}$ तथा $b_2=\lambda-\mu+\frac{1}{2}$, रखने पर व्यंजक का रूप

$$(2\pi)^{3(\sigma-1)}\sigma^{3+2k-2\gamma-2\mu}\times\frac{1}{2\pi i}\int_L \Gamma(s-k-\lambda)\Gamma(\lambda+\mu-s+\tfrac{1}{2})\Gamma(\lambda-\mu-s+\tfrac{1}{2})$$

$$\times G_{1,2}^{2,1}\left(z^{1/\sigma}\middle|\begin{matrix}2-\gamma+2\mu-s,\ 1+k-\lambda\\ \frac{1}{2}+\mu-\lambda,\ \frac{1}{2}-\mu-\lambda\end{matrix}\right)z^{s/\sigma}ds.$$

हो जाता है। $\delta=1$, $q=0$, $m=1$, करने से (2·1) से (3·1) प्राप्त होगा।

(ii) **द्वितीय श्रेणी**—यदि $|\text{amp } z|<\pi$, $\text{Re}\, a_1<1$, $\text{Re}\, b_1>0$, $\text{Re}\, b_2>0$,

$\text{Re}\, b_2>\text{Re}\, a_2$, $\text{Re}\,(b_1-a_2)>-1$,

$$(3.2)\quad \sum_{r=0}^{\infty}\frac{\sigma^{2r}}{r!\,(1+b_1-a_2)_r}G_{2\sigma,2\sigma}^{2\sigma,2\sigma}\left(z\middle|\begin{matrix}\triangle(\sigma,a_1),\triangle(\sigma,a_2)\\ \triangle(\sigma,b_1+r),\triangle(\sigma,b_2)\end{matrix}\right)$$

$$\times G_{2\sigma,2\sigma}^{\sigma,2\sigma}\left(z\middle|\begin{matrix}\triangle(\sigma,1+a_1-b_1-b_2),\ \triangle(\sigma,1+a_2-b_1-b_2)\\ \triangle(\sigma,1-b_2+r),\triangle(\sigma,b_1)\end{matrix}\right)$$

$$=(2\pi)^{3\sigma-4}\sigma^{2(1/2+a_1+a_2-2b_1-b_2)}\,2^{b_2-a_2}\Gamma(1+b_1-a_2)\Gamma(1-a_1+b_1)\Gamma(1-a_1+b_2)$$

$$\times G_{4,4}^{3,3}\left\{z^{2/\sigma}\middle|\begin{matrix}\triangle(2,1+a_2-b_2),\ \frac{1+2a_1-b_1-b_2}{2},\ \frac{3-2a_1+b_1+b_2}{2}\\ 1,\frac{1}{2},\frac{1+b_1-b_2}{2},\frac{1-b_1+b_2}{2}\end{matrix}\right\}.$$

इस श्रेणी की स्थापना (3·1) में प्रयुक्त विधि के द्वारा तथा (2·2) के उपयोग से की जा सकती है।

(iii) **तृतीय श्रेणी**—यदि $|\text{amp } z|<\pi$, $Re(b_1+b_2-a_1)>0$, $Re(2b_1-a_1)>0$, $Re\, b_1<1$, $Re\, b_2<0$, $Re\, b_1>Re\, a_1$,

$$(3\cdot3)\quad \sum_{r=0}^{\infty}\frac{\sigma^{2r}}{r!\,(1-a_1+b_1)_r}G_{2\sigma,2\sigma}^{2\sigma,\sigma}\left(z\middle|\begin{matrix}\triangle(\sigma,1-2b_1+a_1),\ \triangle(\sigma,a_2-b_1-b_2)\\ \triangle(\sigma,1-b_1+r),\ \triangle(\sigma,-b_2)\end{matrix}\right)$$

$$\times G_{2\sigma,2\sigma}^{2\sigma,2\sigma}\left(z\middle|\begin{matrix}\triangle(\sigma,a_1),\triangle(\sigma,a_2)\\ \triangle(\sigma,b_1+r),\triangle(\sigma,b_2)\end{matrix}\right)$$

$$=(2\pi)^{3\sigma-4}\sigma^{2(a_1+a_2)-3b_1-b_2}\,2^{b_1-a_1}\Gamma(1-a_1+b_1)\,\Gamma(2-a_2+b_2)\,\Gamma(1-a_2+b_1)$$

$$\times G^{4,2}_{4,4}\left\{ z^{2/\sigma}\middle| \begin{matrix} \Delta(2, 1+a_1-b_1), \frac{4-2a_2+b_1+b_2}{2}, \frac{2a_2-b_1-b_2}{2} \\ 1, \frac{1}{2}, \frac{2-b_1+b_2}{2}, \frac{b_1-b_2}{2} \end{matrix} \right\}.$$

$$a_1=\tfrac{3}{2}-\gamma-\mu-\lambda,\ a_2=1-k-\lambda,\ b_1=\tfrac{1}{2}-\mu-\lambda,\ b_2=-\tfrac{1}{2}+\mu-\lambda,$$

रखने पर तथा (2·3) का उपयोग करके 3(i) में दी गई विधि द्वारा इस श्रेणी की स्थापना की जा सकती है।

(iv) **चतुर्थ श्रेणी**—यदि $|\text{amp}\, z|<\pi$, $Re(b_1+b_2-a_1)>0$, $Re(2b_2-a_1)>0$, $Re\,(a_2-b_1-b_2)<0$, $Re\, b_1<1$, $Re(b_1-a_1)>-1$,

$$(3.4)\ \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\sigma^{2r}}{r!(1+b_1-a_1)_r}\ G^{\sigma',2\sigma}_{2\sigma',2\sigma}\left(z\middle| \begin{matrix} \Delta(\sigma, 1+a_1-2b_1), \Delta(\sigma, 1+a_2-b_1-b_2) \\ \Delta(\sigma, 1-b_1+r), \Delta(\sigma, 1-b_2) \end{matrix}\right)$$

$$\times G^{2\sigma',2\sigma}_{2\sigma',2\sigma}\left(z\middle| \begin{matrix} \Delta(\sigma, a_1), \Delta(\sigma, a_2) \\ \Delta(\sigma, b_1+r), \Delta(\sigma, b_2) \end{matrix}\right)$$

$$=(2\pi)^{3\sigma-4}\,\sigma^{2(a_1+a_2)-3b_1-b_2}\,2^{b_1-a_1}\,\Gamma(1+b_1-a_1)\Gamma(1-a_2+b_1)\Gamma(1-a_2+b_2)$$

$$\times G^{3,3}_{4,4}\left\{ z^{2/\sigma}\middle| \begin{matrix} \frac{1+2a_2-b_1-b_2}{2}, \Delta(2, 1+a_1-b_1), \frac{3-2a_2+b_1+b_2}{2} \\ 1, \frac{1}{2}, \frac{1-b_1+b_2}{2}, \frac{1+b_1-b_2}{2} \end{matrix} \right\}$$

$a_1=^{2}-\mu-\lambda-\gamma$, $a_2=1+k-\lambda$, $b_1=\frac{1}{2}-\mu-\lambda$, $b_2=\frac{1}{2}+\mu-\lambda$, रखने पर तथा (2·4) का उपयोग करने पर 3(i) में दी गई विधि द्वारा इस श्रेणी की स्थापना की जा सकती है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

डा० वी० एम० भिसे तथा डा० एस० एम० दासगुप्ता के प्रति लेखक अपना आभार प्रदर्शित करना चाहता है जिन्होंने इस कार्य में सहायता पहुँचाई।

निर्देश

1. एर्डेल्यी, ए०। Higher transcendental Functions, मेग्राहिल, न्यूयार्क, भाग 1, 1953.

2. एर्डेल्यी, ए०। Tables of Integral transforms, मेग्राहिल, न्यूयार्क, भाग 2, 1954.

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका
1968, **11**, 39-42

VIJNANA PARISHAD
ANUSANDHAN PATRIKA
1968, **11**, 39-42

सीमांतमान प्रमेयों में आने वाले द्वैती समाकल समीकरणों का एक युग्म—2

पी० एन० राठी

गणित विभाग, एम० आर० इंजीनियरिंग कालेज, जयपुर

[प्राप्त—अक्टूबर 19, 1966]

सारांश

प्रस्तुत टिप्पणी में (1) तथा (2) द्वैती समाकल समीकरणों का औपचारिक हल व्युत्पन्न किया गया है। इसके पूर्व ट्रैंटर द्वारा $\mu=-\frac{1}{2}$, $n=0$ वाली दशा का हल प्रस्तुत किया जा चुका है।

Abstract

A pair of dual integral equations occurring in boundary value problems—II. *By* P. N. Rathie, Department of Mathematics, M. R. Engineering College, Jaipur.

A formal solution of the dual integral equations (1) and (2) has been derived in this note. The solution for the case in which $\mu=-\frac{1}{2}$, $n=0$ was given earlier by Tranter.

1. भूमिका :—प्रस्तुत टिप्पणी का उद्देश्य द्वैती समाकल समीकरणों

$$(1) \quad \int_0^\infty t^{\mu+1/2} \mathcal{J}_{\mu+\nu+2n+1/2}(xt)\, g(t)\, dt = f(x), \; 0<x<1$$

$$(2) \quad \int_0^\infty t \mathcal{J}_\nu(xt)\, g(t)\, dt = F(x), \; x>1,$$

का औपचारिक हल ढूँढ निकालना है जहाँ $f(x)$ तथा $F(x)$ दोनों ही x के दिये हुये फलन हैं।

यह टिप्पणी पिछले शोध पत्र[1] का विस्तार है जिसमें ऐसे ही द्वैती समाकल समीकरणों के एक युग्म पर विचार किया गया है।

वह विशेष दशा जिसमें $\mu=-\frac{1}{2}$, $n=0$, है ट्रैंटर का विख्यात फल है[2]।

2. (1) तथा (2) का हल :

$$g(t)=\int_0^1 xV(x)\mathcal{J}_\nu(xt)\,dx+\int_1^\infty xF(x)\mathcal{J}_\nu(tx)\,dx$$

जहाँ

$$V(x)=\int_0^\infty t\,g(t)\mathcal{J}_\nu(tx)\,dt \qquad (0<x<1).$$

माना कि

$$M(x)=\int_x^1 x^{1-\nu}V(x)\,dx,$$

जिससे

$$M(1)=0 \qquad \frac{\partial M(x)}{\partial x}=-x^{1-\nu}V(x).$$

तब

$$\int_0^1 x\,V(x)\mathcal{J}_\nu(tx)\,dx$$

$$=-\int_0^1 \frac{\partial M}{\partial x}x^\nu\mathcal{J}_\nu(tx)\,dx$$

$$=-\Big[M(x)x^\nu\mathcal{J}_\nu(tx)\Big]_0^1+\int_0^1 M(x)\frac{\partial}{\partial x}[x^\nu\mathcal{J}_\nu(tx)]\,dx$$

$$=t\int_0^1 M(x)x^\nu\mathcal{J}_{\nu-1}(tx)\,dx,$$

यदि $R(\nu)>0$.

माना कि

$$M(x)=\int_x^1 s\,X(s)(s^2-x^2)^\mu\;{}_2F_1\Big(-n,\mu+\nu+n;\nu;\frac{x^2}{s^2}\Big)\,ds$$

तो

$$\int_0^1 x\,V(x)\mathcal{J}_\nu(tx)\,dx$$

$$=2^\mu\Gamma(\nu)\Gamma(\mu+n+1)[\Gamma(\nu+n)]^{-1}t^{-\mu}$$

$$\int_0^1 s^{\nu+\mu+1}X(s)\,\mathcal{J}_{\mu+\nu+2n}(st)\,ds$$

(समाकलन का क्रम बदलने पर तथा ट्रैंटर[3] द्वारा दिये गये फल के आधार पर समाकल का मान ज्ञात करने पर)

अत:

$$(3) \qquad g(t)=H(t)+2^{\mu}\Gamma(\nu)\,\Gamma(\mu+n+1)[\Gamma(\nu+n)]^{-1}\,t^{-\mu}$$

$$\int_0^1 s^{\nu+\mu+1}\,X(s)\,\mathcal{J}_{\mu+\nu+2n}(st)\,ds,$$

जहाँ

$$(4) \qquad H(t)=\int_1^\infty x\,F(x)\,\mathcal{J}_\nu(tx)\,dx.$$

$g(t)$ के लिये (3) से (1) में व्यंजक का मान रखने पर

$$(5) \qquad \int_0^\infty t^{1/2}\mathcal{J}_{\mu+\nu+2n+1/2}(xt)\left\{\int_0^1 s^{\nu+\mu+1}X(s)\mathcal{J}_{\mu+\nu+2n}(st)\,ds\right\}dt$$

$$=P(x), \qquad (0<x<1)$$

जहाँ

$$(6) \qquad P(x)=2^{-\mu}\Gamma(\nu+n)[\Gamma(\nu)\,\Gamma(\mu+n+1)]^{-1}$$

$$\left[f(x)-\int_0^\infty t^{\mu+1/2}\,H(t)\,\mathcal{J}_{\mu+\nu+2n+1/2}(xt)\,dt\right.$$

(5) में समाकलन का क्रम उलटने पर तथा ज्ञात फल[4] के द्वारा t समाकल का मान निकालने पर हमें

$$(2/\pi)^{1/2}\,x^{\mu+\nu+2n+1/2}\,P(x)$$

$$=2/\pi\int_0^x s^{2\mu+2\nu+2n+1}\,X(s)\,(x^2-s^2)^{-1/2}\,ds$$

प्राप्त होता है।

स्लोमिल्श के समाकल समीकरण[5] का उपयोग करने पर इससे

$$(7) \qquad (2/\pi)^{1/2}\,s^{2\mu+2\nu+2n+1}\,X(s)$$

$$=\Big[x^{\mu+\nu+2n+1/2}\,P(x)\Big]_{x=0}+s\int_0^s (s^2-x^2)^{-1/2}\frac{d}{dx}\Big[x^{\mu+\nu+2n+1/2}\,P(x)\Big]dx.$$

प्राप्त होगा।

इस प्रकार यह देखा जाता है कि द्वैती समाकल समीकरणों का हल (3) द्वारा किया जा सकता है जिसमें $H(t)$ को (4) द्वारा, $X(x)$ को (7) द्वारा तथा $P(x)$ को (6) द्वारा व्यक्त किया गया है।

यहाँ पर हमने यह कल्पना की है कि

(i) $R(\nu)>0,\ R(\mu+1)>0,\ n=0, 1, 2, \ldots,$;

(ii) विश्लेषण के समय प्रविष्ट होने वाले कतिपय समाकल विद्यमान हैं तथा

(iii) कतिपय द्विगुण समाकलों में समाकलन का क्रम परस्पर बदला जा सकता है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक विश्वविद्यालय अनुदान आयोग, नई दिल्ली का आभारी है जिसने प्रस्तुत शोध के लिये आर्थिक सहायता पहुँचाई।

निर्देश

1. राठी, पी० एन०। **विज्ञान परिषद अनुसन्धान पत्रिका में प्रकाशनार्थ प्रेषित।**

2. ट्रैंटर, सी० जे०। **क्वार्ट० जर्न० मैथ०, (आक्सफोर्ड), 1951, 2, 60-66.**

3. वही। **प्रोसी० ग्लास्गो मैथ० एसोशि०, 1963, 6, 97-98.**

4. वाट्सन जी० एन०। A Treatise on the Theory of Bessel Functions, कैम्ब्रिज यूनिवर्सिटी प्रेस, 1944, पृ० 401.

5. व्हिटेकर, ई०टी० तथा वाट्सन, जी० एन०। A Course of Modern Analysis, कैम्ब्रिज यूनिवर्सिटी प्रेस, 1963, पृ० 229.

विज्ञान परिषद् अनुसंधान पत्रिका
1968, **11**, 43-47

VIJNANA PARISHAD
ANUSANDHAN PATRIKA
1968, **11**, 43-47

लैपलास तथा माइजर परिवर्तों के मध्य क्रियात्मक सम्बन्ध

जी० के० गोयल
गणित विभाग, राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर

[प्राप्त—फरवरी 28, 1967]

सारांश

लैपलास तथा माइजर परिवर्तों के मध्य क्रियात्मक सम्बन्ध स्थापित करते हुये कुछ समाकलों के मान इसके उपयोग द्वारा निकाले गये हैं।

Abstract

An operational relation between Laplace and Meijer transforms. *By* G. K. Goyal, Department of Mathematics, University of Rajasthan, Jaipur.

An operational relation between Laplace and Meijer transforms is established and a few integrals evaluated by its application.

1. विषय प्रवेश—लैपलास तथा माइजर के परिवर्त क्रमशः

$$\phi(p)=\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt, \quad R(p)>0 \tag{1}$$

तथा

$$\psi(p)=\int_0^\infty (pt)^{1/2} K_v(pt) F(t)\,dt, \quad R(p)>0 \tag{2}$$

पारिभाषित हैं जिन्हें सांकेतिक रूप में $\phi(p) \doteqdot f(t)$ तथा $\psi(p) \underset{v}{\overset{K}{=}} F(t)$ द्वारा प्रदर्शित किया गया है। माइजर G-फलन में (al) संकेत द्वारा $a_1, a_2 .. , al$ क्रम व्यक्त होता है।

2. **प्रमेय.** यदि $\phi(p) \doteqdot f(\sqrt{t})$ (3)

तथा

$$\psi(p) \underset{v}{\overset{K}{=}} t^{1/2} K_v(\delta t) f(t) \tag{4}$$

तो

$$4p^{-1/2}\psi(p)=\int_0^\infty e^{-1/4t(p^2+\delta^2)} K_v(p\delta/2t)\phi(t) t^{-1} dt \tag{5}$$

जहाँ कि $|f(\sqrt{t})|$ का लैपलास परिवर्त, $|t^{1/2} K_v(\delta t)\ f(t)|$ का माइजर परिवर्त विद्यमान हैं और (5) पूर्णतः अभिसारी है।

उपपत्ति—(3) तथा [1, p. 202] क्रियात्मक सम्बन्धों के लिये गोल्डस्टीन प्रमेय

$$t^{-1} e^{-1/4t(\gamma^2+\delta^2)} K_v(\gamma\delta/2t) \doteq 2K_v(\gamma\sqrt{p})K_v(\delta\sqrt{p})$$

का प्रयोग करने पर जहाँ $R(p)>0,\ R(\gamma\pm\delta)^2>0$ हमें

$$\int_0^\infty e^{-1/4t(\gamma^2+\delta^2)} K_v\left(\frac{\gamma\delta}{2t}\right)\frac{\phi(t)}{t}\,dt = 2\int_0^\infty K_v(\gamma\sqrt{t})K_v(\delta\sqrt{t})f(\sqrt{t})dt,$$

प्राप्त होता है।

अब सर्वत्र γ को p द्वारा प्रतिस्थापित करके, दाहिनी ओर $t=x^2$ रखकर तथा दाहिनी ओर के समाकल की विवेचना (4) द्वारा करने पर हमें (5) की प्राप्ति होती है।

ऊपर दी गई प्रमेय के सम्प्रयोग द्वारा कुछ रोचक समाकलों के मान निकाले जा रहे हैं।

उदाहरण 1. माना कि $f(\sqrt{t})=t^{1/2(1-\rho)}$

तो [1, p. 137]

$$\phi(p)=\Gamma\tfrac{1}{2}(1-\rho)p^{(\rho-3)/2},\ R(\rho)<4,\ R(p)>0,$$

तथा [2, p. 145]

$$\psi(p)=\Gamma\left\{v+\frac{1-\rho}{2}\right\}\{\Gamma\tfrac{1}{2}(1-\rho)\}^2\Gamma\left(\frac{1-\rho}{2}-v\right)$$

$$\times 2^{-\rho-3/2}p^{\rho-v-1}\delta^v\times {}_2F_1\left\{v+\frac{1-\rho}{2},\ \frac{1-\rho}{2};\ 1-\rho;\ 1-\delta^2/p^2\right\}$$

जहाँ

$$R(p+\delta)>0,\ R\left(\frac{3-\rho}{2}\right)>|(v)|.$$

(5) का व्यवहार करने पर

$$\int_0^\infty t^{1/2(\rho-5)} e^{-1/4t(p^2+\delta^2)} K_v\left(\frac{p\delta}{2t}\right)dt$$

$$=\Gamma\left(v+\frac{1-\rho}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\rho}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\rho}{2}-v\right)2^{1/2-\rho}p^{\rho-v-3/2}\delta^v$$

$$\times {}_2F_1\left\{v+\frac{1-\rho}{2},\ \frac{1-\rho}{2};\ 1-\rho;\ 1-\delta^2/p^2\right\}, \qquad (6)$$

जहाँ $$R(p+\delta)^2>0,\ R(\rho\pm v-3)<0.$$

उदाहरण 2. $f(\sqrt{t})=t^{1-1/2k}J_\rho(a\sqrt{t})$ रखें तो [1, p. 186]

$$\phi(p)=\frac{\Gamma\{\frac{1}{2}(\rho-k)+2\}}{\Gamma(1+\rho)p^{2+(\rho-k)/2}}\left(\frac{a}{2}\right)^\rho {}_1F_1\left\{2+\frac{\rho-k}{2};\ \rho+1;\ -\frac{a^2}{4p}\right\}$$

जहाँ $R\left(\frac{k-\rho}{2}\right)>2,\ R(p)>0,$

तथा [3, p. 110, R. 13)

$$\Psi(p)=2^{k-3}\sum_{v,-v}\frac{a^\rho p^v\Gamma\frac{1}{2}(k+v\pm v+\rho)}{\Gamma(1+\rho)\delta^{k+\rho+v}}$$

$$\times F_4\left\{\frac{k+\rho}{2},\ \frac{k+\rho}{2}+v:1+\rho,\ 1+v;\ -\frac{a^2}{\delta^2},\ \frac{p^2}{\delta^2}\right\}$$

जहाँ $$R(k+v\pm v+\rho)>0,\ R(p+\delta)>0,\ a>0.$$

(5) का प्रयोग करने पर

$$\int_0^\infty t^{(k-\rho)/2-3}\,e^{-1/4t(p^2+\delta^2)}K_v(p\delta/2t)\,{}_1F_1\left\{2+\frac{\rho-k}{2};\ 1+\rho;\ -a^2/4t\right\}dt$$

$$=\frac{2^{\rho+k-1}}{\Gamma\{2+(\rho-k)/2\}}\sum_{v,-v}\frac{p^{v+1/2}\Gamma\frac{1}{2}(k+v\pm v+\rho)}{\delta^{k+\rho+v}}$$

$$\times F_4\left\{\frac{k+\rho}{2},\ \frac{k+\rho}{2}+v:1+\rho;\ 1+v;\ -a^2/\delta^2,\ p^2/\delta^2\right\} \tag{7}$$

जहाँ $$R(p+\delta)^2>0,\ R\left(\frac{k-\rho}{2}\pm v-2\right)<0$$

उदाहरण 3. यदि $f[\sqrt{(t)}]=t^{1-1/2k}k_\rho[a\sqrt{t}]$

तो [1, p. 199]

$$\phi(p)=\frac{1}{a}\,\Gamma\left\{2+\frac{\rho-k}{2}\right\}\Gamma\left(2-\frac{\rho+k}{2}\right)p^{(k-3)/2}\,e^{a^2/8p}\,W_{(k-3)/2,\ \rho/2}(a^2/4p)$$

जहाँ $R(\pm\rho/2-k/2)>-2,\ R(p)>0.$

तथा [3, p. 111, R. 17]

$$\psi(p)=p^{1/2}\sum_{v,-v}\sum_{v,-v}\{\Gamma(-v)\}^2\Gamma\left(\frac{k\pm\rho}{2}+v\right)$$

$$\times 2^{k-4}a^{-k-2v}(\delta p)^v\times F_4\left\{\frac{k-\rho}{2}+v, \frac{k+\rho}{2}+v: 1+v, 1+v: \frac{p^2}{a^2}, \frac{\delta^2}{a^2}\right\}$$

जहाँ $R(k\pm\rho\pm 2v)>0,\ R(a+p+\delta)>0$

(5) का प्रयोग करने पर

$$\int_0^\infty t^{(k-5)/2}\, e^{-1/4t(p^2+\delta^2-a^2/2)}\, k_v\left(\frac{p\delta}{2t}\right) W_{(k-3)/2,\, \rho/2}(a^2/4t)\, dt$$

$$=2^{k-2}\sum_{v,-v}\sum_{v,-v}\frac{\{\Gamma(-v)\}^2\,\Gamma\{(k\pm\rho)/2+v\}(p\delta)^v}{\Gamma(2\pm\rho/2-k/2)a^{k+2v-1}}F_4\left\{\frac{k-\rho}{2}+v, \frac{k+\rho}{2}+v:\right.$$

$$\left.1+v,\ 1+v; \frac{p^2}{\alpha^2}, \frac{\delta^2}{\alpha^2}\right\} \qquad \ldots \quad (8)$$

जहाँ $2R(p+\delta)^2>a^2,\ R(k\pm 2v\pm\rho-1)<0.$

उदाहरण 4. माना कि $f(t)=t^{\lambda/2-1}\ G_{l\ q}^{m\ n}\left\{\frac{4}{t}\middle|\begin{matrix}(\alpha_l)\\(\beta_q)\end{matrix}\right\}$

तो [2, p. 419, R. 5]

$$\phi(p)=2^{\lambda/2-2}G_{l,\ q+1}^{m+1,\ n}\left\{4p\middle|\begin{matrix}(\alpha_l)\\-\lambda/2,\ \beta_q\end{matrix}\right\}$$

जहाँ $q+1<2(m+n),\ |\arg p|<\frac{\pi}{2},\ R\left(\beta_j-\frac{\lambda}{2}\right)>-3/2, j=1,2,3,\ \ldots, m.$

तथा [4, p. 364, R 3.4]

$$\psi(p)=p^{1/2}\sum_{v,-v}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\pi\ 2^{\lambda-3}\ p^{v+2r}\ \delta^{-\lambda-v-2r}}{r!\ \sin(-v\pi)\ \Gamma(v+1+r)}\ G_{l,\ q+2}^{m+2,\ n}\left\{\delta^2\middle|\begin{matrix}(\alpha_l)\\\lambda/2+v+r,\ \lambda/2+r, \beta_q\end{matrix}\right\}$$

जहाँ $R(p+\delta)>0,\ 2(m+n)>1+q,\ R(\lambda\pm 2v+2+2\alpha_j)>0, j=1,2,\ldots, n.$

(5) का प्रयोग करने पर

$$\int_0^\infty e^{-1/4t(p^2+\delta^2)}\, k_v\left(\frac{p\delta}{2t}\right) G_{l,\ q+1}^{m+1,\ n}\left\{4t\Big|{(a_l) \atop -\lambda/2,\ \beta_q}\right\}\frac{dt}{t}$$

$$=\sum_{v,\ -v}\sum_{r=0}\frac{2^{\lambda/2+1}\,\pi\,(p/\delta)^{v+2r}}{r!\sin(-v\pi)\Gamma(v+1+r)\delta^{\lambda}}\, G_{l,\ q+2}^{m+2,\ n}\left\{\delta^2\Big|{(a_l) \atop \lambda/2+v+r,\ \lambda/2+r,\ \beta_q}\right\} \quad (9)$$

जहाँ $p<q+1,\ n\geqslant 1,\ m+n>\frac{l+q-1}{2},\ |\arg t|<\left(m+n-\frac{p+q-1}{2}\right)\frac{\pi}{4}$,

$R(p+\delta)^2>0,\ R(\lambda)<1,\ R(\beta+\frac{1}{2})>0$ तथा $\beta=\max(\beta_k),\ (k=1, 2, \ldots, m)$.

कृतज्ञता-ज्ञापन

डा० के० सी० शर्मा ने इस शोधपत्र की तैयारी में जो सहायता पहुँचाई है, उसके लिये मैं उनका कृतज्ञ हूँ ।

निर्देश

1. एर्डेल्यी, ए० तथा अन्य । Tables of Integral Transforms, भाग 1 1954.

2. वही । वही, मैकग्राहिल, भाग 2.

3. शर्मा, के० सी० । प्रोसी० ग्लास्गो मैथ० एसो०, 1964, 6(2), 107-112.

4. वही । प्रोसी० नेश० इंस्टी० साइंस, इंडिया, 1964, **30A**, 360-66.

विज्ञान परिषद् अनुसंधान पत्रिका
1968, **11**, 49-58

VIJNANA PARISHAD
ANUSANDHAN PATRIKA
1968, **11**, 49-58

कैडमियम क्लोराइड के विलयनों से हाइड्रस कैडमियम आक्साइड का अवक्षेपण

अरुण कुमार सक्सेना,
मनहरन नाथ श्रीवास्तव,
तथा
बी० बी० एल० सक्सेना
रसायन विभाग, प्रयाग विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

[प्राप्त–मई 23, 1967]

सारांश

प्रस्तुत शोध पत्र में कैडमियम क्लोराइड के विलयनों से सोडियम हाइड्राक्साइड के द्वारा हाइड्रस कैडमियम आक्साइड के अवक्षेपण का अध्ययन दिया गया है। प्रयोगफलों से प्रगट है कि क्षार की अधिकाधिक मात्रा मिलाने से विभिन्न हाइड्राक्सीक्लोराइड यौगिक $Cd(OH)_{1\cdot25}$ $Cl_{(0\cdot25)}$ nH_2O(A), $Cd(OH)_{1\cdot33}$ $Cl_{(0\cdot25)}$ nH_2O (B) तथा $Cd(OH)_{1\cdot5}$ $Cl_{(0\cdot25)}$ nH_2O (C) क्रमशः अवक्षिप्त होते हैं जो अन्त में कैडमियम हाइड्राक्साइड में परिणत हो जाते हैं। ये यौगिक $Cd^{++}:OH^-$ की दृष्टि से फाइटक्नेक्ट के हाइड्राक्सी क्लोराइड यौगिकों, $Cd(OH)_{1\cdot25}$ $Cl_{0\cdot75}$ (II), $Cd(OH)_{1\cdot33}$ $Cl_{0\cdot67}$(III) तथा $Cd(OH)_{1\cdot5}$ $Cl_{0\cdot5}$ (IV), के समरूप हैं, परन्तु इनमें क्लोराइड की मात्रा अपेक्षाकृत कम है। इसका कारण यह है कि प्राप्त अवक्षेप वस्तुतः हाइड्राक्सी क्लोराइड तथा हाइड्राक्सी संकर यौगिकों के मिश्रण होते हैं।

काल प्रभाव के कारण विलयनों में H^+ मुक्त होते हैं। इसकी व्याख्या इनके जलअपघटन अथवा आक्जोलेशन क्रिया के द्वारा की जा सकती है जिसके फलस्वरूप अवक्षेपों की सक्रियता भी घटती जायगी।

Abstract

Precipitation of hydrous cadmium oxide from cadmium chloride solutions. *By* Arun Kumar Saxena, Man Haran Nath Srivastava, and B. B. L. Saxena, Chemistry Department, University of Allahabad, Allahabad.

The precipitation of hydrous cadmium oxide from a solution of cadmium chloride by sodium hydroxide has been studied. It is observed that with the progressive addition of the alkali, various hydroxy chlorides e.g. $Cd(OH)_{1\cdot25}\ Cl_{(0\cdot25)}\ nH_2O$ (A), $Cd\ (OH)_{1\cdot33}\ Cl_{(0\cdot25)}\ nH_2O$ (B) and $Cd(OH)_{1\cdot5}\ Cl_{(0\cdot25)}\ nH_2O$ (C) are successively precipitated, finally forming cadmium hydroxide. These compounds resemble closely in Cd^{++} : OH^- ratio to those reported by Feitknecht $Cd(OH)_{1\cdot25}\ Cl_{0\cdot75}$ (II), $Cd(OH)_{1\cdot33}\ Cl_{0\cdot67}$ (III) and $Cd(OH)_{1\cdot5}\ Cl_{0\cdot5}$ (IV) but differ significantly in their chloride contents. This has been ascribed to the fact that the precipitates obtained are actually mixtures of hydroxy chlorides and hydroxy complexes, thus accounting for their low chloride contents.

During ageing, H^+ are released in the system. This may be due to hydrolysis or oxolation, thus forming less reactive aggregates.

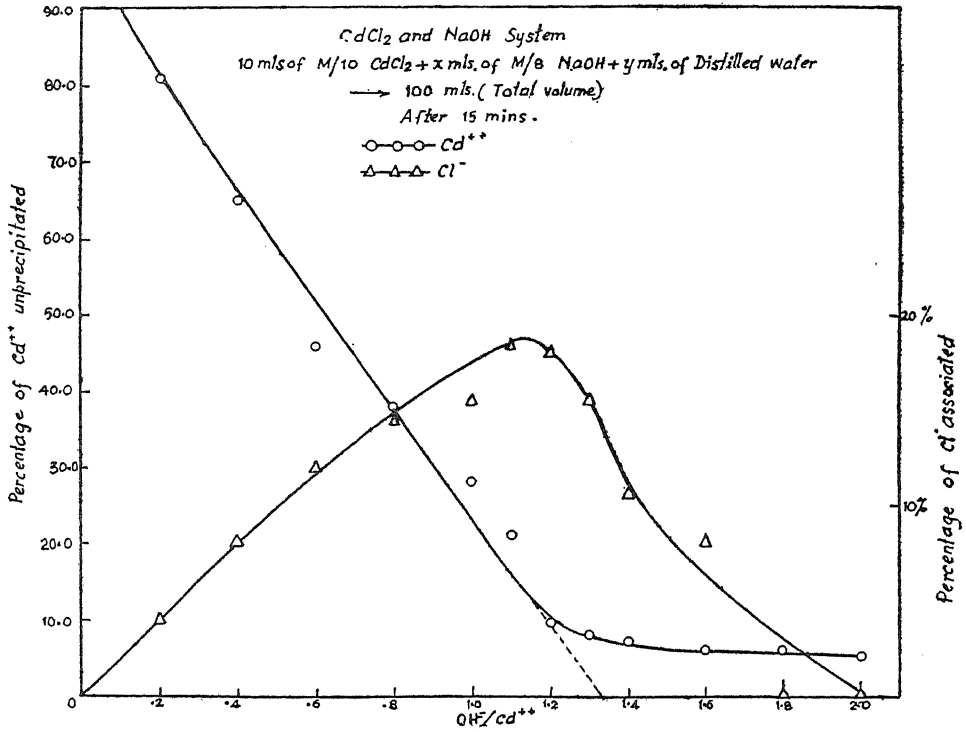
एक पूर्व प्रकाशित शोधपत्र में हमने[1] कैडमियम सल्फेट के विलयनों से सोडियम हाइड्राक्साइड के द्वारा हाइड्रस कैडमियम आक्साइड के अवक्षेपण का वर्णन किया था। प्रस्तुत शोधपत्र में कैडमियम क्लोराइड के विलयनों से हाइड्रस कैडमियम आक्साइड के अवक्षेपण का अध्ययन दिया जा रहा है। प्राप्त निष्कर्षों से यह स्पष्ट है कि हाइड्राक्सीसल्फेटों की भाँति इस दशा में भी कैडमियम हाइड्राक्साइड के अवक्षेपण के पूर्व विभिन्न हाइड्राक्सीक्लोराइड यौगिक अवक्षिप्त होते हैं। फाइटक्नेक्ट ने भी विभिन्न[2] हाइड्राक्सी क्लोराइड यौगिकों, यथा $CdOHCl$(I), $Cd(OH)_{1\cdot25}\ Cl_{0\cdot75}$ (II), $Cd(OH)_{1\cdot33}\ Cl_{0\cdot67}$ (III) तथा $Cd(OH)_{1\cdot5}\ Cl_{0\cdot5}$ (IV) के अवक्षेपण का वर्णन किया है। हमारे प्रयोगफलों से भी $Cd(OH)_{1\cdot25}\ Cl_x$ (II′) तथा $Cd(OH)_{1\cdot33}\ Cl_x$ (III′) तथा $Cd(OH)_{1\cdot5}\ Cl_x$ (IV′) के अवक्षेपण के प्रमाण मिलते हैं, परन्तु ये यौगिक फाइटक्नेक्ट के हाइड्राक्सीक्लोराइड यौगिकों से इस अर्थ में भिन्न हैं कि इनमें क्लोराइड की मात्रा उनकी अपेक्षा कम ($x \approx 0.25$) है। इससे प्रगट है कि इस दशा में भी प्राप्त अवक्षेप वस्तुतः विभिन्न हाइड्राक्सीक्लोराइड तथा शुद्ध हाइड्राक्सी संकरों के मिश्रण होते हैं।

प्रयोगात्मक

कैडमियम क्लोराइड (AnalaR) तथा सोडियम हाइड्राक्साइड (Merck) के 0·5 *M* विलयन बनाये गये, और उनकी सान्द्रता ज्ञात की गई। कैडमियम की सान्द्रता सोलोक्रोम ब्लैक सूचक का प्रयोग करते हुये E.D.T.A.[3] के द्वारा अनुमापित करके ज्ञात की गई। क्लोराइड का अनुमापन मोर (Mohr's) की विधि द्वारा किया गया। प्रयोगों में प्रयुक्त कैडमियम क्लोराइड के सभी विलयन उपर्युक्त विलयन को तनु करके प्राप्त किये गये।

पी-एच० एवं विद्युच्चालकता का मापन क्रमशः लीडस् नार्थ्रप के पी-एच० मापी एवं चालकता सेतु के द्वारा किया गया।

अवक्षेपण का अध्ययनः

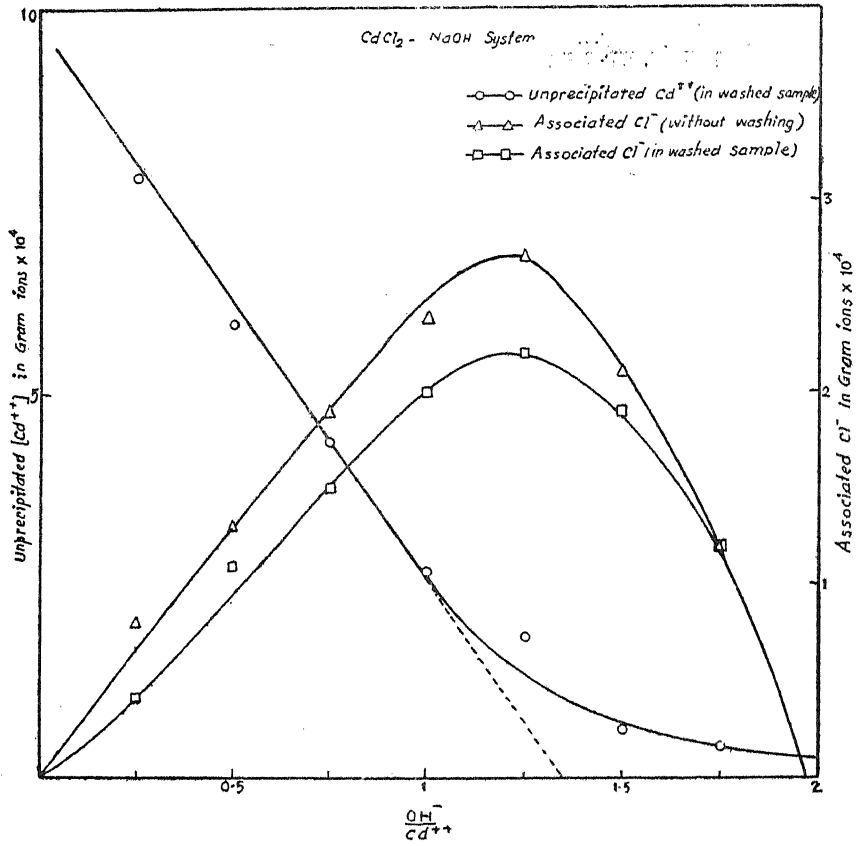
(अ) **वैश्लेषिक अध्ययनः**—(1) पहले की भाँति[1] कैडमियम क्लोराइड तथा सोडियम हाइड्राक्साइड विलयनों को विभिन्न अनुपातों में मिलाकर उनके मिश्रण तैयार किये गये, तथा 15 मिनट के भीतर उन्हें अपकेन्द्रित करके, प्राप्त स्वच्छ विलयनों में Cd^{++} तथा Cl^- आयनों का अनुमापन किया गया। प्रयोगफलों से अवक्षिप्त Cd^{++} तथा अवक्षेप में संयुक्त Cl^- की मात्राओं की गणना की गई। चित्र 1 के वक्र इस प्रकार के प्रयोगफलों का प्रतिनिधित्व करते हैं।

चित्र 1

$CdCl_2$ तथा NaOH प्रणाली में से Cd का अवक्षेपण

15 मिनट के पश्चात्

M/10 $CdCl_2$ का 10 मिली० + M/8 NaOH का x मिली० + आसुत जल का y मिली० → 100 मिली० (पूर्ण आयतन)

(2) **अवक्षेप की परीक्षा**:—एक अन्य प्रयोग में अपकेन्द्रित विलयनों के साथ ही साथ अवक्षेपों की भी परीक्षा की गई। इसके लिये अवक्षेपों को पहले आसुत जल से खूब धोकर उन्हें तनु नाइट्रिक अम्ल की

एक निश्चित मात्रा में विलयित कर लिया गया, और फिर प्राप्त विलयनों में Cd^{++} तथा Cl^{-} का अनुमापन किया गया। प्राप्त प्रयोगफल चित्र 2 में अंकित हैं।

चित्र 2

कैडमियम के अवक्षेपण में धोने का प्रभाव

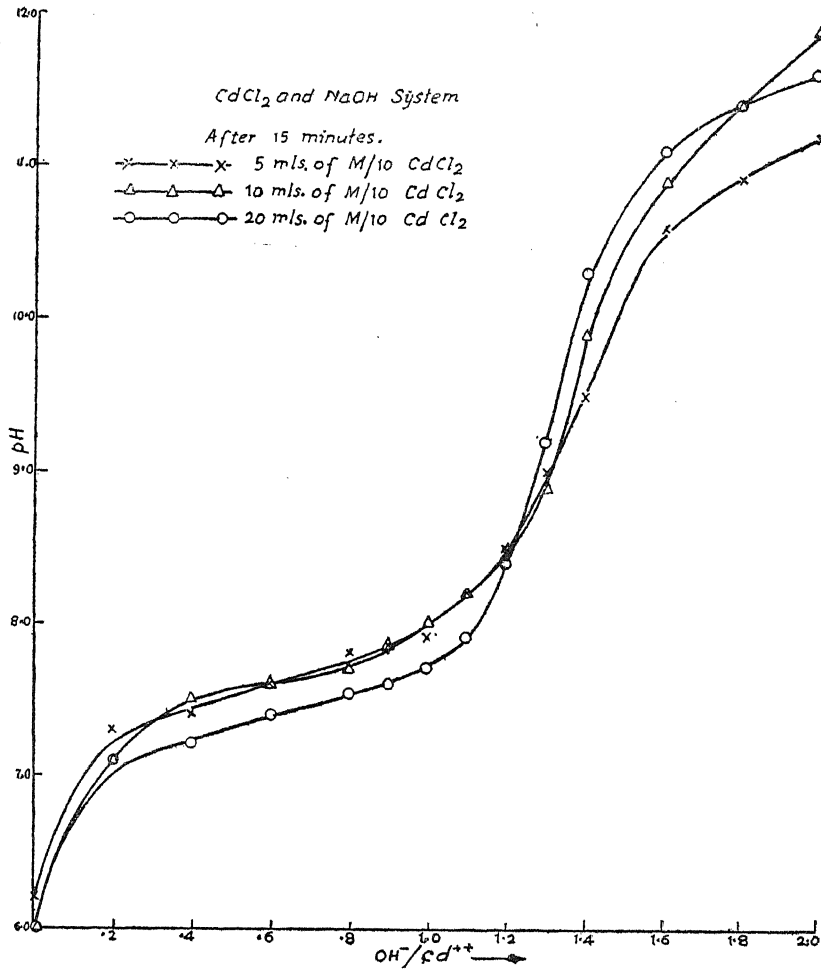
$CdCl_2$—NaOH प्रणाली

— O — O —अनवक्षिप्त Cd^{++} (धोने के पश्चात)

— △ — △ संयुक्त Cl^{-} (बिना धोये)

— □ — □ —संयुक्त Cl^{-} (धोने के पश्चात)

(ब) भौतिक-रासायनिक अध्ययनः—उपर्युक्त रीति से कैडमियम क्लोराइड तथा सोडियम हाइड्राक्साइड के मिश्रण विभिन्न सान्द्रताओं पर तैयार किये गये, और उनके

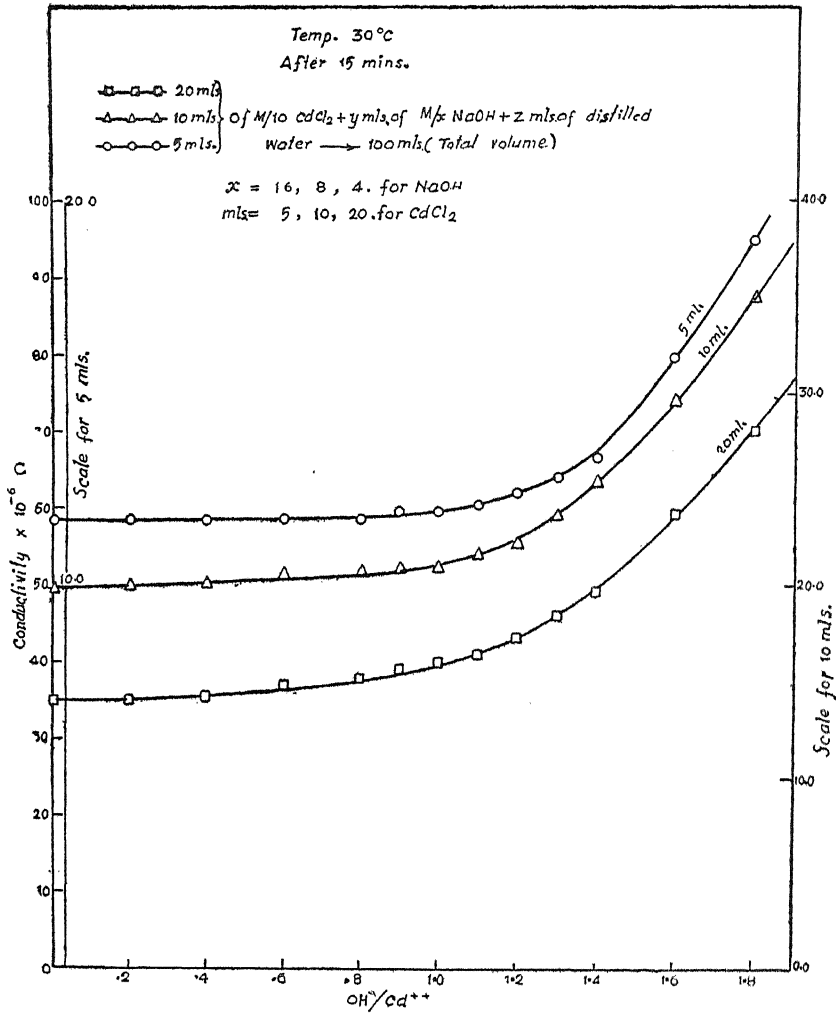
पी-एच० एवं विद्युच्चालकता का मापन किया गया । प्रयोगफल चित्र 3 एवं 4 के वक्रों द्वारा प्रदर्शित हैं।

चित्र 3

$CdCl_2$ तथा NaOH प्रणाली में से कैडमियम के अवक्षेपण का पी-एच मापी अध्ययन

15 मिनट के पश्चात्

×—×—×—M/10 $CdCl_2$ का 5·0 मिली०

—△—△—△—M/10 $CdCl_2$ का 10·0 मिली०

—○—○—○—M/10 $CdCl_2$ का 20·0 मिली०

चित्र 4

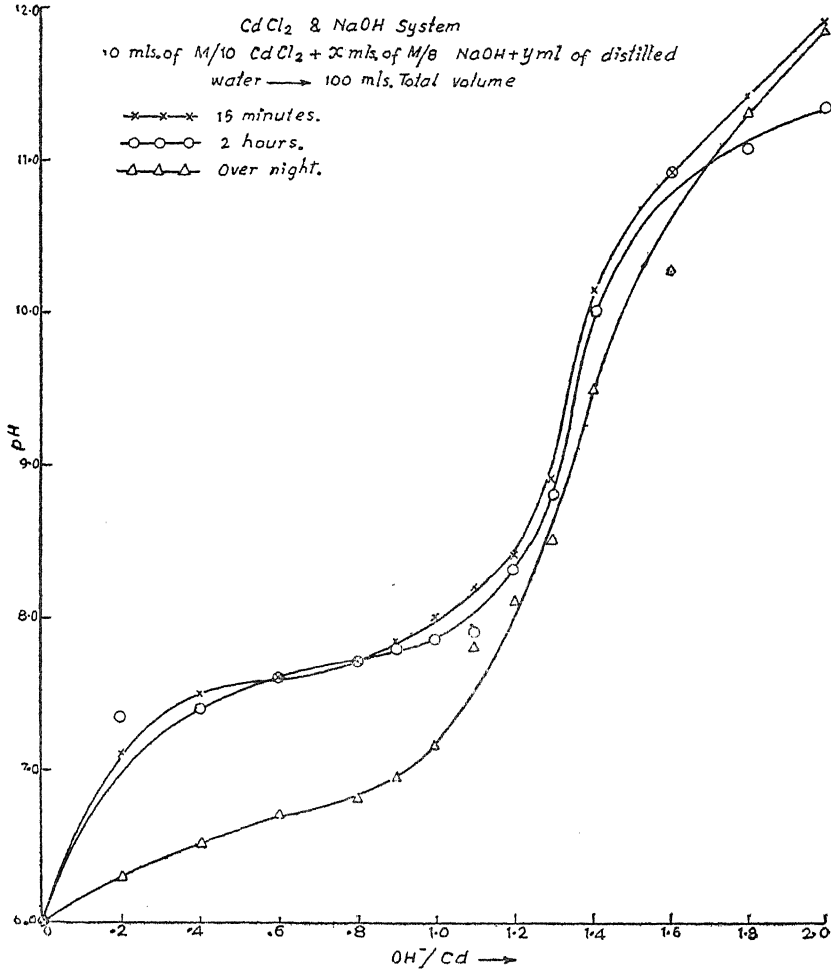
$CdCl_2$ तथा NaOH प्रणाली में से कैडमियम के अवक्षेपण का चालकता मापी अध्ययन

ताप 30°C 15 मिनट के पश्चात्

M/10 CdCl का { —□—□—□—20 मिली०, —△—△—△—10 मिली०, —○—○—○—5 मिली० } + M/x NaOH का y मिली० + आसुत जल का 3 मिली०

→100 मिली० (पूर्ण आयतन)

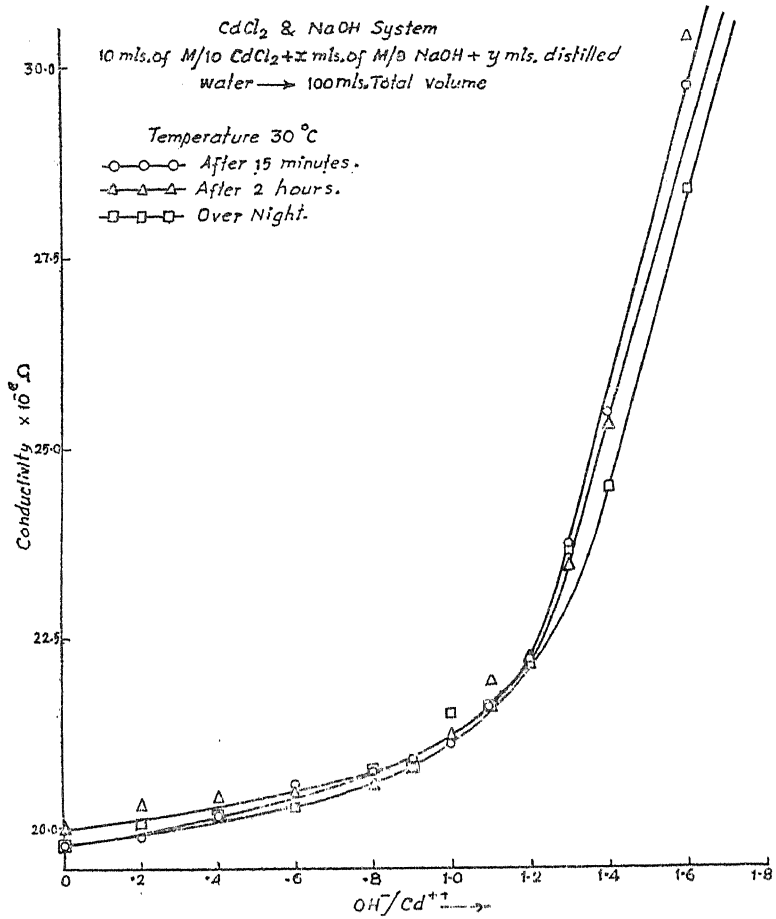
काल-प्रभाव का अध्ययन:—इन अवक्षेपों पर काल के प्रभाव के अध्ययन के हेतु उपर्युक्त मिश्रणों की एक श्रेणी को काल प्रभाव के लिये छोड़ दिया गया और विभिन्न कालों (15 मिनट, 2 घंटा, एक दिन) के

पश्चात् उनके पी-एच० एवं विद्युच्चालकता का मापन किया गया। प्रयोगफल चित्र 5 एवं 6 के वक्रों में प्रदर्शित हैं।

चित्र 5

कैडमियम हाइड्रस आक्साइड पर काल प्रभाव का पी-एच मापी अध्ययन

M/10 $CdCl_2$ का 10 मिली० + M/8 NaOH का x मिली० + आसुत जल का y मिली० ⟶100 मिली० (पूर्ण आयतन)

— × — × — × — 15 मिनट

— O — O — O — 2 घन्टे

— △ — △ — △ — एक दिन

चित्र 6

कैडमियम हाइड्रस आक्साइड पर काल प्रभाव का चालकतामापी अध्ययनम

M/10 $CdCl_2$ का 10 मिली० + M/8 NaOH का x मिली० + आसुत जल का y मिली० → 100 मिली० (पूर्ण आयतन)

ताप 30°C

— ○ — ○ — ○ — 15 मिनट के पश्चात्
— △ — △ — △ — 2 घन्टे पश्चात्
— □ — □ — □ — एक दिन

विवेचना

चित्र 1, 2 के वक्रों से स्पष्ट है कि कैडमियम क्लोराइड के विलयन में सोडियम हाइड्राक्साइड की अधिकाधिक मात्रा मिलाने से अवक्षिप्त कैडमियम की मात्रा बढ़ती जाती है, और लगभग 1·5 तुल्य क्षार मिलाने के पश्चात् यह मात्रा स्थिर हो जाती है। अन्त में लगभग 4-5% मात्रा शेष रह जाती है, जो संभवत:

कैडमियम हाइड्राक्साइड के पेप्टीकृत अवस्था में रहने के कारण होती है। इस प्रकार लगभग 1·5 तुल्य क्षार पर हाइड्रस कैडमियम आक्साइड का पूर्ण अवक्षेपण माना जा सकता है।

इन चित्रों में अनवक्षिप्त Cd^{++} के वक्रों में लगभग 1·25 तुल्य क्षार के स्थान पर स्पष्ट भंग भी परिलक्षित हैं। इन्हीं स्थानों पर संयुक्त Cl^- के वक्रों के उच्चिष्ठ बिन्दु भी स्थित हैं। इससे प्रगट है कि 1·25 तुल्य तक मुख्यतः हाइड्राक्सीक्लोराइड यौगिक अवक्षिप्त होते हैं, परन्तु इसके बाद क्षार की मात्रा बढ़ने पर ये धीरे धीरे कैडमियम हाइड्राक्साइड में परिणत हो जाते हैं जिसके कारण अवक्षेप में संयुक्त क्लोराइड की मात्रा घटती जाती है। अनवक्षिप्त Cd^{++} के वक्रों को और आगे बढ़ाने पर वे शून्य रेखा को लगभग 1·33 तुल्य क्षार पर काटते हैं। इससे एक ऐसे हाइड्राक्सी क्लोराइड यौगिक $Cd(OH)_{1\cdot33}\,Cl_x$ के अवक्षेपण के सबल प्रमाण मिलते हैं जिसमें Cd^{++} तथा OH^- का अनुपात 1:1·33 होगा।

चित्र 3 और 4 में कैडमियम क्लोराइड और सोडियम हाइड्राक्साइड के क्रमशः पी-एच० तथा विद्युच्चालकता द्वारा अनुमापन के वक्र चित्रित हैं। इन वक्रों में भी स्पष्ट भंग लगभग 1·25 तुल्य क्षार पर परिलक्षित होते हैं। इस प्रकार के ये प्रयोगफल उपर्युक्त निष्कर्षों की पुष्टि करते हैं।

चित्र 5 और 6 में काल-प्रभाव सम्बन्धी क्रमशः पी-एच० एवं विद्युच्चालकता के वक्र अंकित हैं। इनसे प्रगट है कि अवक्षेपों पर काल-प्रभाव के द्वारा हाइड्रोजन आयन मुक्त होते हैं। इसी कारण सभी विलयनों का पी-एच० घट जाता है, और 1·2 तुल्य तक साधारणतः सभी विलयन अधिक चालक हो जाते हैं, परन्तु 1·2 तुल्य क्षार के बाद काल-प्रभाव के साथ विलयनों की चालकता घटती जाती है। इसका कारण यह है कि मुक्त H^+ विलयनों में उपस्थित OH^- की अधिक मात्रा से संयोग करके कुचालक जल के अणु बना लेते हैं।

अतः यह स्पष्ट है कि कैडमियम क्लोराइड के विलयन में सोडियम हाइड्राक्साइड की अधिकाधिक मात्रा मिलाने से पहले विभिन्न हाइड्राक्सीक्लोराइड अवक्षेपित होते हैं जो कि बाद में कैडमियम हाइड्राक्साइड में परिणत हो जाते हैं। निम्नांकित सारणी में विभिन्न अवस्थाओं में प्राप्त अवक्षेपों में Cd:OH तथा $Cd : Cl^-$ के अनुपातों की गणना की गई है। ये गणनायें चित्र 2 में प्रदर्शित प्रयोगफलों पर आधारित हैं।

सारणी 1

मिश्रित NaOH की मात्रा $Cd^{++} : OH^-$	अवक्षेप में OH^-/Cd^{++}	अवक्षेप में Cl^-/Cd^{++}
1 : 0·25	1 · 13	0 · 19
: 0·50	1 · 22	0 · 27
: 0· 5	1 · 32	0 · 26
: 1·00	1 · 36	0 · 27
: 1·25	1 · 48	0 · 26
: 1·50	1 · 57	0 · 20
: 1·75	1 · 71	0 · 12

सारणी 1 से प्रगट है कि विभिन्न अवस्थाओं में $Cd^{++} : OH^-$ के मान 1 : 1·25, 1·33, 1·50 के सन्निकट हैं जब कि $Cd^{++} : Cl^-$ का मान 1 : 0·25 माना जा सकता है। इस प्रकार यह निष्कर्ष प्राप्त होता है कि कैडमियम क्लोराइड के विलयन में धीरे-धीरे सोडियम हाइड्राक्साइड की मात्रा मिलाने से क्रमशः निम्नांकित हाइड्राक्सीक्लोराइड यौगिक प्राप्त होते हैं :—

$$Cd(OH)_{1\cdot25}\,Cl_{(0\cdot25)}\,nH_2O \qquad (A)$$

$$Cd(OH)_{1\cdot33}\,Cl_{(0\cdot25)}.nH_2O \qquad (B)$$

$$Cd(OH)_{1\cdot50}\,Cl_{(0\cdot25)}.nH_2O \qquad (C)$$

जो कि अन्त में कैडमियम हाइड्राक्साइड में परिणत हो जाते हैं।

उपर्युक्त यौगिक $Cd^{++} : OH^-$ के अनुसार फाइटक्नेक्ट के हाइड्राक्सीक्लोराइड यौगिकों (II), (III) तथा (IV) के समरूप हैं, परन्तु इनमें Cl^- की मात्रा उनकी अपेक्षा काफी कम है (केवल 0·25)। इससे प्रगट है कि प्राप्त अवक्षेप केवल हाइड्राक्सीक्लोराइड न होकर हाइड्राक्सीक्लोराइड यौगिक तथा शुद्ध हाइड्राक्सी संकरों, यथा $Cd(OH)_{1\cdot25}\cdot nH_2O$, $Cd(OH)_{1\cdot33}\,nH_2O$, तथा $Cd(OH)_{1\cdot5}\cdot nH_2O$, के मिश्रण हैं। इस प्रकार के हाइड्राक्सी संकरों के बनने की विवेचना एक पूर्व प्रकाशन[1] में की जा चुकी है।

काल प्रभाव के मध्य H^+ मुक्त होने की प्रक्रिया दो कारणों से हो सकती है :—

(1) हाइड्राक्सीक्लोराइड यौगिक धीरे धीरे जल अपघटित होकर H^+ मुक्त करें।

(2) हाइड्राक्सीक्लोराइड एवं हाइड्राक्सी संकर यौगिक की आक्जोलेशन प्रक्रिया जिससे कि काल-प्रभाव के द्वारा अवक्षेपों की सक्रियता भी घटती जाती है।

निर्देश

1. सक्सेना, ए० के०, श्रीवास्तव, एम० एन० तथा सक्सेना, बी० बी० एल०। **विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका**, 1966, **9**, 15।

2. फाइटक्नेक्ट, डब्लू०, तथा रीनमान, आर०। **हेल्व० शिम० एक्टा**, 1951, **34**, 2255।

3. बेलचर, फ्रैन्क जे०। **द एनालिटिकल यूजेज आव एथिलीन डाइएमीन टेट्राएसीटिक एसिड**, डी० वान० नास्ट्रंड कम्पनी, 1961, 161।

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका
1968, 11, 59-64

VIJNANA PARISHAD
ANUSANDHAN PATRIKA
1968, 11, 59-64

स्कालोपेण्ड्रा मौरसिटेन्स लिन की आकारिकी : भाग 6 : ग्राहक अंग

गंगा शरण शुक्ल
जीव विज्ञान विभाग, गोरखपुर विश्वविद्यालय,
गोरखपुर

[प्राप्त—दिसम्बर 1, 1967]

सारांश

चार प्रकार के ग्राहक अंग पाये गये :—

(1) यान्त्रिक अंग जो श्रृंगिका में तथा शरीर की समस्त वाह्य सतह पर पाये जाते हैं।

(2) कीमोरिसेप्टर्स—ये श्रृंगिका, मैंडिबुल तथा प्रथम युगल मैक्सिल पर होते हैं।

(3) नेत्र—ये प्रकाश ग्राही हैं, तथा

(4) टामसवरी इंद्रियाँ—ये श्रवण सम्बन्धी हैं।

श्रृंगिकायें दो प्रकार की ज्ञानेन्द्रियों से बनी हैं—सेंसिला ट्राइकोडिया तथा सेंसिला बेसीकोनिका।

नेत्रों की संख्या चार हैं जिनमें उभयोतल लेंस रहते हैं। लेंस के नीचे वाह्यत्वचा की कोशिकायें प्याले के आकार की होती हैं जिनकी भित्ति अत्यधिक रंजित होती है। वाह्यत्वचा के भीतरी भाग में संवेदी कोशिकायें होती हैं जिनके सिरों पर रेब्डोम पाये जाते हैं। रंजक रेब्डोम के बीच में पाया जाता है।

ऊपर से टामसवरी इन्द्रियाँ प्रकट नहीं रहतीं किन्तु जब सिर के नीचे से प्रकाश पड़ता है तो वे प्रकट होती हैं। सम्भवतया ये श्रवण से सम्बन्धित हैं।

रसवेदी ग्राहक मेडिबेल्स तथा प्रथम मेक्सिला में स्थित होते हैं और वे क्रमशः कटार तथा अंकुश के आकार के होते हैं।

Abstract

Morphology of *Scolopendra Morsitens Linn.* **Part VI : Receptor organs.** *By* G. S. Shukla, Zoology Department, Gorakhpur University, Gorakhpur, India.

There are four types of receptors viz. the mechanoreceptors, chaemoreceptors, photoreceptors and the organs of Tomosvary. The mechanoreceptors are lodged on the antennae and general surface of the body whereas the chaemoreceptors on the antennae, mandibles and first pair of maxillae.

The antennae possess two kinds of receptors, sensilla trichodea and sensilla basiconica. Sensilla trichodea are of two types, the tuberculate and alveolar type which are tactile and olfactory receptors respectively. Sensilla basiconica are also olfactory receptors.

There are four parts of simple eyes each having a thick biconvex lens. The epidermal cells are pigmented and disposed in a cup-shaped manner. On the inner side of the epidermis are found sense cells which have rhabdomes on their ends. Pigment is present between the rhabdomes near their bases.

The organs of Tomosvary do not show any external demarcation but become distinct when the light is passed beneath the head. They are probably auditory receptors.

Gustatory receptors are present on the mandibles and first maxillae and are dagger shaped and hook shaped respectively.

बुर्कल (1939) ने स्कालोपेन्ड्रा विरीडीकार्निस (*Scolopendra viridicornis*) के कुछ ग्राहक अंगों का और स्नाडग्रास (1952), जान्सन तथा बट (1941) ने इनमें से कुछ अंगों की मात्र क्रियाओं का वर्णन किया है। शुक्ल (1960) ने स्कालोपेन्ड्रा मौरसिटेन्स के इन अंगों का संक्षिप्त विवरण दिया है। प्रस्तुत लेख में इन्हीं अंगों का विस्तृत विवरण देने का प्रयास किया गया है।

प्रयोगात्मक

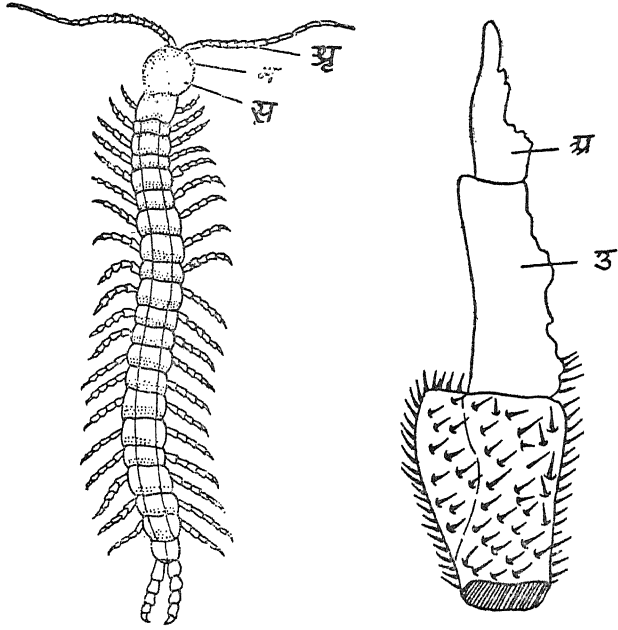
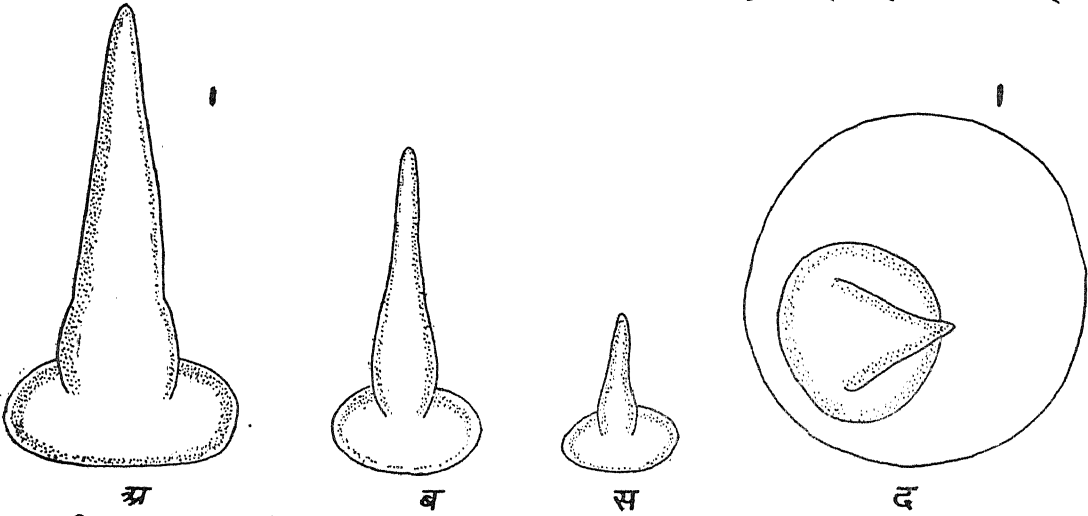
पूर्व कथित (शुक्ल 1964) रीति से जन्तुओं का संकलन एवं पालन-पोषण किया गया। कैनाडा बालसम तथा यूपेराल दोनों का प्रयोग आरोपण माध्यम के लिये किया गया। उपादानों का स्थिरीकरण ऐल्कोहली बोआं में किया गया तथा खंडों को डेलाफिल्ड हेमाटाक्सीलिन में रंजित किया। इओसिन को प्रति-रंजक के रूप में व्यवहृत किया गया।

ग्राहक अंग चार प्रकार के होते हैं अर्थात् **यांत्रिक अंग** जो शृंगिका में तथा कदाचित् शरीर की समस्त बाह्य सतह पर भी पाये जाते हैं। कीमोरिसेप्टर्स शृंगिका; मेन्डिबुल तथा प्रथम युगल मैक्सिला पर नेत्र प्रकाश ग्राही है; जब कि चौथे प्रकार के संग्राहक को टामसवरी की इन्द्रियाँ कहते हैं और वे श्रवण सम्बन्धी हैं।

1. श्रृंगिकायें

एक जोड़ी श्रृंगिकायें (चित्र 1) जिन पर दो प्रकार की ज्ञानेन्द्रियाँ अर्थात् सेन्सिला ट्राइकोडिया और सेन्सिला वेसिकोनिका होती हैं वे लचीली और सखण्ड होती हैं। श्रृंगिक खण्डों की संख्या भिन्न भिन्न होती हैं, बहुधा बीस खण्ड और यदा-कदा अठ्ठारह खण्ड भी होते हैं। सभी खण्डों की रूपरेखा, केवल संकीर्ण उपान्त और शंकुरूप अन्तिम (चित्र 2) को छोड़ कर लगभग समान है। ये दोनों खण्ड अधिकतर प्रतिरूपों में प्रायः टूटे होते हैं जो इस तथ्य का सूचक हैं कि इन पर कोई विशिष्ट ग्राहकांग नहीं होता।

चित्र 1—सम्पूर्ण स्कालोपेन्ड्रा मौरसिटैन्स का पृष्ठीय दृश्य न, नेत्र; स, सिर; श्रृ, श्रृंगिका।

चित्र 2—श्रृंगिका के दूरस्थ खंड। अ, अन्तिम खण्ड; उ, उपान्त खण्ड।

सेन्सिला ट्राइकोडिया (चित्र 3 अ, ब, स) सातवें खण्ड के अग्रिम सभी खण्डों पर अधिकतम मात्रा में होते हैं परन्तु ये प्रथम सात, उपान्त और अन्तिम खण्डों पर बिरले ही पाये जाते हैं। सेन्सिला दो प्रकार के होते हैं—वे जो सामान्य पृष्ठ पर गुलिकीय होते हैं जबकि उपान्त वायुकोष्ठिका, गुहा में होते हैं। ये कदाचित्

चित्र 3—श्रृंगिक. के ग्राहकांग। अ, ब, स, सेन्सिला ट्राइकोडिय.; द, सेन्सिला वेसिकोनिक।

स्पेंशन्द्रियाँ हैं जो किसी वस्तु से छू जाने पर उत्तेजित होती हैं। अन्त में इनके नीचे सम्वेदी कोशकाओं का उद्दीपन पारगमित होता है।

गुलिकीय सेन्सिला कण्टक के आकार का होता है जो आधार झिल्ली पर स्वच्छन्दता से हिलता है। कण्टक कोटर एक गुलक पर उभड़ा होता है। गुलिकीय सेन्सिला की भित्तियाँ पर्याप्त मोटी होती हैं और संभवतः उनका कार्य स्पर्शन ही है।

वायुकोष्ठिका सेन्सिला भी कण्टक के आकार का होता है जो स्वच्छन्दता पूर्वक वायुकोष्ठिका गुहा में हिलता है। वे तीन प्रकार के होते हैं—छोटे, बड़े तथा मध्यम आकार के। इन सेन्सिला की भित्तियाँ कोमल होती हैं और कदाचित् कीमोरिसेप्टर होती हैं।

सेन्सिला बेसीकोनिका (चित्र 3 द) सातों समीपस्थ खण्डों के अग्र और पश्च भाग पर मध्य में आधारित है। परन्तु वे प्रथम खण्ड के पश्च और सातवें खण्ड के अग्र भाग पर नहीं होते। इस प्रकार वे छः झुण्डों में एक पंक्ति में लगभग 15 होते हैं। वे खूँटी के आकार के तथा सम्वेदक होते हैं। वाह्य प्रवर्ध जिसकी पतली और पारदर्शी भित्ति होती है, छोटे खूँटी के आकार के होते हैं। खूँटी का सिरा कोमल झिल्लीदार तथा टोपाकार होता है जो एक वृत्ताकार क्षेत्र में व्यवस्थित होता है। ये रचनाएँ रासायनिक उद्दीपन को ग्रहण करती हैं और संभवतः गन्धों की ग्राहक होती हैं।

इस प्रकार श्रृंगिकायें स्पर्शक और घ्राणक दोनों हैं। भाटिया (1924) ने लिखा है कि श्रृंगिकायें स्पर्शांग का कार्य करती हैं किन्तु उन्होंने इन अंगों की स्थिति और संरचना का वर्णन नहीं किया है। बुर्कल (1939) ने मौलिक परीक्षण के आधार पर यह मत दिया है कि श्रृंगिकायें स्पर्शक और घ्राणक दोनों ही हैं परन्तु उन्होंने श्रृंगिकाओं पर विभिन्न प्रकार के सेन्सिला का अवकलन नहीं किया है।

2. नेत्र

नेत्र सिर के अग्र भाग पर श्रृंगिकाओं के पीछे स्थित हैं और वे साधारण प्रकार के प्रकाशग्राही हैं। दो युग्म नेत्र दोनों ओर होते हैं जो कि एक क्रास के रूप में रहते हैं। एक जोड़ा पृष्ठ-पार्श्व और दूसरा पार्श्विक स्थिति में होता है। वे सिर की सामान्य सतह से काले गोलार्ध के रूप में उभरे होते हैं। प्रत्येक नेत्र (चित्र 4) निम्नलिखित भागों का बना होता है:—

चित्र 4—नेत्र का अनुप्रस्थ काट। अर, आन्तर रंजक; ए, एपीथीलियम; क, कार्निया, तक, तंत्रिका कोशिकायें; दत, दृष्टि-तंत्रिका; वर, वाह्री रंजक; र, रैब्डोम; ल, लेंस; व, वाह्य-चर्म; सक, संवेदक कोशिकायें।

कार्निया, जो नेत्र का वाह्य-चर्मीय स्तर बनाता है, पारदर्शी होता है और यह समीपवर्ती वाह्य चर्म से पृथक होता है

क्योंकि इसमें सामान्य रंग-द्रव्य नहीं होता। यह गुम्बदाकार तथा मोटा होता है और कार्नियल लेंस बनाता है जो कि लगभग उभयोतल होता है। सेक्शन (Section) में इसकी रचना परतदार दिखाई देती है। लेन्स के नीचे बाह्य त्वचा की कोशिकायें प्याले के आकार में क्रम से रहती हैं जिसकी भित्ति अत्यधिक रंजित होती है। प्याले की भित्ति के बाद वाली कोशिकायें अन्दर की ओर रैटिना बनाती हैं जो कि कोशिकाओं के संग्रह से निर्मित होती है। ये एक सतह बनाती हैं जो कि परिधि नेत्रिका क्षेत्र की वाह्य त्वचा से अविच्छिन्न होता है। इन संवेदी कोशिकाओं के सिरे में रैब्डोम (Rhabdome) होता है। रैब्डोम लम्बे तथा एक दूसरे के आमने-सामने दो पंक्तियों में होते हैं। पंक्तियों की लम्बी धुरी लेंस की लम्बी धुरी के समान्तर रहती है अर्थात् वे नेत्र के लम्ब रूप के समकोण होते हैं। रैब्डोम के दोनों परत एक दूसरे से थोड़े से अवकाश पर होते हैं। इस प्रकार प्याले की दीवालें बड़ी मोटी होती हैं और उसके मध्य में थोड़ा सा अवकाश होता है। रैब्डोम के आधारीय भाग के बीच में काला रंजक होता है। दृष्टि तंत्रिका नेत्र में नीचे से घुसती है और श्रृंगिकाओं के सूत्र संवेदी कोशिकाओं से जुड़े होते हैं। तंत्रिका नेत्र के पिछले आधे भाग तक फैली होती है।

नेत्र साधारण प्रकार के हैं इसलिए इनमें प्रत्येक संवेदी कोशिकाओं के लिए केवल एक ही डायोप्टरीय यन्त्र होता है। तात्पर्य यह कि सम्पूर्ण सम्वेदी कोशिकाओं के लिए प्रत्येक नेत्र में केवल एक लैंस होता है परन्तु संग्राहक उपकरण बहुत सी कोशिकाओं का होता है। नेत्र का डायोप्टरीय भाग प्रकाश को पारेषित करता है और प्रकाश किरणों को संघनित करता है तथा संग्राहक भाग रैटिना या दृष्टिपटल का कार्य करता है।

रैब्डोम के बीच रंजक का होना महत्वपूर्ण प्रतीत होता है। नेत्र भित्ति के अधिचर्म कोशिकाओं में रंजक की उपस्थिति कदाचित् एक काले पर्दे का कार्य करती है और यह थोड़े भी प्रकाश को इसके बाहर नहीं जाने देती अर्थात् सम्वेदी कोशिकाओं में प्रकाश किरणों का पूर्ण अवशोषण हो जाता है।

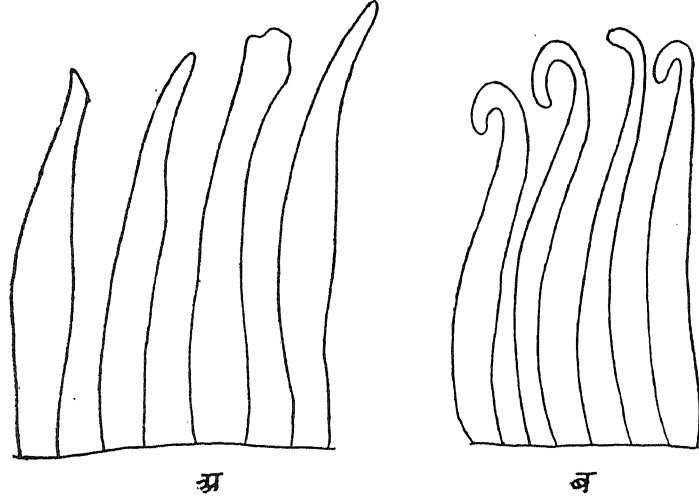
3. टामसवरी की इन्द्रियाँ

टामसवरी की इन्द्रियाँ सिर पर पार्श्विक तथा श्रृंगिका के आधार के पीछे नेत्रों के आगे स्थित होती हैं। उनका स्थान तभी प्रकट होता है जब सिर के नीचे से प्रकाश डाला जाता है। वे दो पारदर्शक क्षेत्र के रूप में होते हैं और उनके नीचे एक पीला स्थान सा प्रतीत होता है जिसमें एक श्वासनली रहती है। इसकी संरचना से ऐसा प्रतीत होता है कि वे श्रव्य तंत्र हैं और वे भिन्न प्रकार उत्तेजित होते हैं।

पारदर्शक उपत्वचा कर्णपटह की भाँति कार्य करता है जो कि एक श्वास नली से, जिससे कदाचित् सम्वेदी कोशिकायें जुड़ी होती हैं, समागम करती है। टिम्पैनम ध्वनि लहर से उत्तेजित होता है और यह उद्दीपन श्वासनली को हस्तान्तरित होता है। क्रम से यह उन सम्वेदी कोशिकाओं को प्राप्त होता है जो इससे जुड़ी होती हैं।

इन इन्द्रियों की कार्य-प्रणाली के सम्बन्ध में भिन्न-भिन्न विचार-धारायें हैं। सेजविक (1905) के मत से ये श्रवणीय हैं। स्नाइग्रास (1952) और जानसन तथा बट (1941) ने लिखा है कि इनका कार्य अज्ञात है। वरहाफ और बुर्कल (1939) का भी वही मत है जो सेजविक का है, परन्तु पोर्टर के मत में जैसा कि बुर्कल (1939) ने लिखा है कि वे घ्राणेन्द्रियों का कार्य करती हैं। किन्तु यह मत इन अंगों की संरचना से सिद्ध नहीं होता है।

4. रसवेदी ग्राहक

मेन्डेबिल्स के रसवेदी ग्राहक (चित्र 5 अ) दाँत के अन्दर अग्र मध्यम सिरे पर होते हैं। ये लम्बे कटार के आकार के होते हैं।

चित्र 5--रसवेदी ग्राहक। अ मैंडिबुलर रसवेदी ग्राहक; ब, मैक्सिलरी रसवेदी ग्राहक।

प्रथम मैक्सिला के रसवेदी ग्राहक अंकुशाकार (चित्र 5 ब) होते हैं। ये टेलोपोडाइट के प्याले के बाहरी किनारे तथा येन्डाइट के बाहरी और भीतरी किनारों पर होते हैं।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा० राम रक्षपाल के प्रति अपना अभार प्रकट करता है जिन्होंने समय-समय पर अपने बहुमूल्य प्रस्तावों द्वारा इस कार्य को पूरा करने में योग दिया।

निर्देश

1. भाटिया, एम० एल०। प्रोसी० लाहौर फिल० सोसा० 1924, **3**, 15-17.

2. बुर्कल, डब्लू०। Mem. Inst. Butantan. 1939, **13**, 49-361.

3. जानसेन, ओ० ए० तथा बट, एफ० एच०। Embryology of Insects and Myriapods, New York and London, McGraw-Hill, 1941.

4. सेजविक, ए०। A Student's Text Book of Zoology; 19?8, Vol. III.

5. शुक्ल, जी० एस०। प्रोसी० नेशन० एके० सा०, 1960.

6. वही। Entomologische Berichten 1964, Deel **24. I : III**; 55-60.

विज्ञान परिषद् अनुसंधान पत्रिका
1968, **11**, 65-69

VIJNANA PARISHAD
ANUSANDHAN PATRIKA
1968, **11**, 65-69

हाइपरज्यामितीय फलनों से सम्बन्धित कतिपय श्रेणियाँ

पी० एन० राठी
गणित विभाग, एम० आर० इंजीनियरी कालेज, जयपुर

[प्राप्त—अगस्त 1, 1967]

सारांश

बैली के सूत्र तथा कार्लिट्ज द्वारा दिये गये इसके विलोम का उपयोग करते हुये हाइपरज्यामितीय फलनों, ${}_1F_1$, ${}_2F_1$, F_4 तथा ψ_2 सम्बन्धी कतिपय अनन्त श्रेणियाँ प्राप्त की गई हैं।

Abstract

Some series involving hypergeometric functions. *By* P. N. Rathie, Department of Mathematics, M. R. Engineering College, Jaipur.

W. N. Bailey's formula and its inverse given by L. Carlitz have been used to sum certain infinite series involving hypergeometric functions ${}_1F_1$, ${}_2F_1$, F_4 and ψ_2.

1. भूमिका

इस शोधपत्र का मुख्य उद्देश्य बैली के सूत्र तथा कार्लिट्ज द्वारा दिये गये इसके विलोम का उपयोग करते हुये कुछ अनन्त श्रेणियों की प्राप्ति है जिनमें ऐपेल फलन F_4, गास का हाइपरज्यामितीय फलन ${}_2F_1$, सार्वीकृत संगमी हाइपरज्यामितीय फलन ψ_2 तथा पोच्चामर बार्नीज संगमी हाइपरज्यामितीय फलन ${}_1F_1$, व्यवहृत हुये हैं।

प्राप्त परिणाम अत्यन्त व्यापक हैं। मुख्य परिणामों की कतिपय अत्यन्त ही रोचक दशायें दी गई हैं। इनमें से एक हाल ही में सी० जे० ट्रैंटर द्वारा दिए गए परिणाम का सार्वत्रीकरण है।

2. ऐपेल के फलन F_4 के लिये श्रेणी

बैली[1] ने निम्नांकित सूत्र सिद्ध किया है:

$$(2.1)\qquad z^{\lambda-\mu-\nu} J_\mu(az)\, J_\nu(bz) = \frac{2^{\lambda-\mu-\nu}a^\mu b^\nu}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda+2n)\Gamma(\lambda+n)}{n!} J_{\lambda+2n}(z) \times F_4\Big[-n, \lambda+n; \mu+1, \nu+1; a^2, b^2\Big].$$

(2.1) के दोनो ओर $z^{\sigma-1}J_\rho(cz)$, से गुणा करने, 0 तथा ∞ के मध्य z के प्रति समाकलन करने तथा एक ज्ञात परिणाम[2] का व्यवहार करने पर हमें

$$(2.2)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda+2n)\Gamma(\lambda+n)\Gamma\{\frac{1}{2}(\lambda+\sigma+\rho)+n\}}{n!\,\Gamma\{\frac{1}{2}(\lambda-\sigma-\rho)+n+1\}} F_4(-n, \lambda+n; \mu+1, \nu+1; a^2, b^2)$$

$$_2F_1[\tfrac{1}{2}(\sigma+\rho+\lambda)+n, \tfrac{1}{2}(\sigma+\rho-\lambda)-n; \rho+1; c^2]$$

$$=\frac{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+1)\Gamma(\rho+1)}{2^{\sigma+\lambda-\mu-\nu-1}\,a^\mu b^\nu c^\rho}\int_0^\infty \frac{J_\mu(az)\,J_\nu(bz)\,J_\rho(cz)}{z^{\mu+\nu-\sigma-\lambda+1}}\,dz.$$

प्राप्त हो जाता है।

$\sigma=\lambda-\rho$ रखने पर, $a\to 0$ करने पर तथा $\underset{x\to 0}{Lt}\, J_\mu(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^\mu\Big/\Gamma(\mu+1)$ का उपयोग करने पर (2.2) ऐसे परिणाम में परिवर्तित हो जाता है जिसे हाल ही में ट्रैंटर[3] ने प्रस्तुत किया है।

बैली[4] के निम्नांकित परिणाम का उपयोग करते हुये (2.2) के दाईं ओर का समाकल निकालने पर

$$(2.3)\qquad \int_0^\infty t^{\lambda-1}\, J_\mu(at)\, J_\nu(bt)\, J_e(ct)\, dt$$

$$=\frac{2^{\lambda-1}\, a^\mu b^\nu\, \Gamma\{\frac{1}{2}(\lambda+\mu+\nu+\rho)\}}{c^{\lambda+\mu+\nu}\,\Gamma(\nu+1)\,\Gamma(\mu+1)\,\Gamma\{1-\frac{1}{2}(\lambda+\mu+\nu-\rho)\}}$$

$$\times F_4\Big[\tfrac{1}{2}(\lambda+\mu+\nu-\rho), \tfrac{1}{2}(\lambda+\mu+\nu+\rho); \mu+1, \nu+1; \frac{a^2}{c^2}, \frac{b^2}{c^2}\Big],$$

यदि $R(\lambda+\mu+\nu+\rho)>0, R(\lambda)<5/2,\ c>a+b$

तो हमें

$$(2.4)\qquad F_4\Big[\tfrac{1}{2}(\sigma+\lambda-\rho), \tfrac{1}{2}(\sigma+\lambda+\rho); \mu+1, \nu+1; \frac{a^2}{c^2}, \frac{b^2}{c^2}\Big]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda+2n)\,\Gamma(\lambda+n)\{\frac{1}{2}(\lambda+\rho+\sigma)\}_n\,\Gamma\{1+\frac{1}{2}(\rho-\sigma-\lambda)\}}{n!\,\Gamma(\rho+1)\,\Gamma\{1+\frac{1}{2}(\lambda-\sigma-\rho)+n\}\,c^{-\rho-\sigma-\lambda}}$$

$$F_4(-n, \lambda+n; \mu+1, \nu+1; a^2, b^2)\ {}_2F_1[\tfrac{1}{2}(\sigma+\rho+\lambda)+n, \tfrac{1}{2}(\sigma+\rho-\lambda)-n; \rho+1; c^2]$$

प्राप्त होता है।

$a=b$ मान कर तथा

$$(2.5) \qquad F_4(\alpha, \beta; \gamma, \delta; x, x) = {}_4F_3\left[\begin{matrix}\alpha, \beta, (\gamma+\delta-1)/2, (\gamma+\delta)/2; 4x\\ \gamma, \delta, \gamma+\delta-1\end{matrix}\right]$$

को[5] व्यवहृत करने पर (2.4) से हमें निम्नांकित परिणाम प्राप्त होगा :—

$$(2.6) \qquad {}_4F_3\left[\begin{matrix}\frac{1}{2}(\sigma+\lambda-\rho), \frac{1}{2}(\sigma+\lambda+\rho), \frac{1}{2}(\mu+\nu+1), \frac{1}{2}(\mu+\nu+2); 4a^2/c^2\\ \mu+1, \nu+1, \mu+\nu+1\end{matrix}\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda+2n)\Gamma(\lambda+n)\{\frac{1}{2}(\lambda+\rho+\sigma)\}_n \Gamma\{1+\frac{1}{2}(\rho-\sigma-\lambda)\}}{n!\, \Gamma(\rho+1)\Gamma\{1+\frac{1}{2}(\lambda-\sigma-\rho)+n\}c^{-\rho-\sigma-\lambda}}$$

$$\times {}_4F_3\left[\begin{matrix}-n, \lambda+n, \frac{1}{2}(\mu+\nu+1), \frac{1}{2}(\mu+\nu+2); 4a^2\\ \mu+1, \nu+1, \mu+\nu+1\end{matrix}\right]$$

$${}_2F_1[\tfrac{1}{2}(\sigma+\rho+\lambda)+n, \tfrac{1}{2}(\sigma+\rho-\lambda)+n; \rho+1; c^2].$$

पुनः (2.4) में $c=1$ रखने पर हमें

$$(2.7) \qquad F_4[\tfrac{1}{2}(\sigma+\lambda-\rho), \tfrac{1}{2}(\sigma+\lambda+\rho); \mu+1, \nu+1; a^2, b^2]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(\lambda+2n)\Gamma(\lambda+n)\Gamma(1-\sigma)\{\frac{1}{2}(\sigma+\lambda\pm\rho)\}_n}{n!\, \Gamma\{1+\frac{1}{2}(\lambda-\sigma\pm\rho)+n\}}$$

$$F_4(-n, \lambda+n; \mu+1, \nu+1; a^2, b^2)$$

प्राप्त होगा ।

3. ${}_2F_1$ के लिए श्रेणी

हाल ही में कार्लिट्ज़ ने[6] निम्नांकित रूप में (2.1) का विलोम प्रस्तुत किया है :—

$$(3.1) \qquad \mathcal{J}_\lambda(z) = \frac{a^{-\mu}\, b^{-\nu}}{2^{\lambda-\mu-\nu}} \sum_{n=0}^{\infty} (-ab)^{-n} z^{\lambda-\mu-\nu} \mathcal{J}_{\mu+n}(az)\, \mathcal{J}_{\nu+n}(bz) \cdot Q$$

जहाँ

$$(3.2) \qquad Q = \left\{\frac{\Gamma(\mu+n+1)\,\Gamma(\nu+n+1)}{n!\,\Gamma(\lambda+n+1)} F_4(-n, -\lambda-n; -\mu-n, -\nu-n; a^2, b^2)\right.$$

$$-\frac{\Gamma(\mu+n-1)\Gamma(\nu+n-1)a^2b^2}{(n-2)!\,\Gamma(\lambda+n-1)}$$

$$\left.\times F_4(-n+2, -\lambda-n+2; -\mu-n+2, -\nu-n+2; a^2, b^2)\right\}$$

(3.1) में दोनों ओर $Z^{\sigma-1}J_\rho(cz)$ से गुणा करने पर, 0 तथा ∞ के मध्य Z के प्रति समाकलन करने पर तथा (2.3) एवं एक ज्ञात परिणाम[2] का व्यवहार करने पर हमें

$$(3.3) \quad {}_2F_1\left[\tfrac{1}{2}(\sigma+\lambda+\rho), \tfrac{1}{2}(\sigma+\lambda-\rho); \lambda+1; \frac{1}{c^2}\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\lambda+1)\{\frac{1}{2}(\sigma+\lambda\pm\rho)\}_n Q}{c^{2n}\Gamma(\mu+n+1)\Gamma(\nu+n+1)}$$

$$\times F_4\left[\tfrac{1}{2}(\sigma+\lambda-\rho)+n, \tfrac{1}{2}(\sigma+\lambda+\rho)+n; \mu+n+1, \nu+n+1; \frac{a^2}{c^2}, \frac{b^2}{c^2}\right]$$

प्राप्त होता है।

जब $a \to 0$, (3.3) से

$$(3.4) \quad {}_2F_1\left[\tfrac{1}{2}(\sigma+\lambda+\rho), \tfrac{1}{2}(\sigma+\lambda-\rho); \lambda+1; \frac{1}{c^2}\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{\frac{1}{2}(\sigma+\lambda\pm\rho)\}_n}{n!(\lambda+1)_n c^{2n}} {}_2F_1(-n, -\lambda-n; -\nu-n; b^2)$$

$$\times {}_2F_1\left[\tfrac{1}{2}(\sigma+\lambda+\rho)+n, \tfrac{1}{2}(\sigma+\lambda-\rho)+n; \nu+n+1; \frac{b^2}{c^2}\right]$$

प्राप्त होगा।

4. ${}_1F_1$ के लिये श्रेणी

पुन: (3.1) में दोनों ओर $Z^{2\sigma+1}\exp(-Z^2/4c)$ से गुणा करने पर, 0 तथा ∞ के मध्य Z के प्रति समाकलन करने पर तथा एक ज्ञात परिणाम[7] का प्रयोग करने पर हमें

$$(4.1) \quad {}_1F_1(\sigma+\lambda/2+1; \lambda+1; -c)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-c)^n\Gamma(\lambda+1)(\sigma+\lambda/2+1)_n Q}{\Gamma(\mu+n+1)\Gamma(\nu+n+1)}$$

$$\psi_2[\sigma+\lambda/2+n+1; \mu+n+1, \nu+n+1; -a^2c, -b^2c]$$

की प्राप्ति होती है।

(4.1) में $b \to 0$ रखने पर हमें सरलता से

$$(4.2) \quad {}_1F_1(\sigma+\lambda/2+1; \lambda+1; -c)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-c)^n(\sigma+\lambda/2+1)_n}{n!(\lambda+1)_n} {}_2F_1(-n, -\lambda-n; -\mu-n; a^2)$$

$$\times {}_1F_1(\sigma+\lambda/2+1+n; \mu+1+n; -a^2c)$$

प्राप्त होता है।

जब $a=1$, तो $(-1)^n(-\mu)_{-n}(1+\mu)_n=1$ के उपयोग से हमें निम्नांकित परिणाम प्राप्त होता है :—

$$(4.3) \qquad {}_1F_1(\sigma+\lambda/2+1;\lambda+1;-c)$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c^n(\sigma+\lambda/2+1)_n(\lambda-\mu)}{n!(\lambda+1)_n(\mu+1)_n}\,{}_1F_1(\sigma+\lambda/2+1+n;\mu+n+1;-c).$$

निर्देश

1. बैली, डब्लू० एन० । **क्वार्ट० जर्न० मैथ० (आक्सफोर्ड)**, 1935, **6**, 235
2. एर्डेल्यी, ए० तथा अन्य । Tables of Integral transforms. **भाग 2**, **मैक-ग्राहिल, न्यूयार्क** 1954, **पृ०**48 **समीकरण** 9.
3. ट्रैंटर ,सी० जे० । **क्वार्ट० जर्न० मैथ० (आक्सफोर्ड)**, 1962, **13**, 215.
4. बैली, डब्लू० एन० । **प्रोसी० लन्दन मैथ० सोसा०**, 1935, **40**, 45.
5. वही । **क्वार्ट० जर्न० मैथ० (आक्सफोर्ड)**, 1933, **4**, 308.
6. कार्लिट्ज, एल० । **ड्यूक मैथ० जर्नल**, 1961, **28**, 436.
7. एर्डेल्यी, ए० तथा अन्य । Tables of Integral transforms. **भाग 1**, **मैकग्रा-हिल, न्यूयार्क** 1954, **पृ०** 187, **समीकरण** 43.

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका
1968, **11,** 71-76

VIJNANA PARISHAD
ANUSANDHAN PATRIKA
1968, **11,** 71-76

प्राचलों के प्रति समाकलन

पी० सी० गोलस

गवर्नमेंट कालेज, कोटपुतली, जयपुर

[प्राप्त—जून 27, 1967]

सारांश

प्रस्तुत शोध निबन्ध का उद्देश्य H-फलन को प्राचलों के प्रति समाकलित करना है। इसमें क्रियात्मक कलन की विधि व्यवहृत की गई है। H-फलन का माइजर के जी-फलन के व्यापकीकरण के रूप में होने से ज्ञात फलनों के प्राचलों के प्रति समाकलन से जो फल प्राप्त हुये उन्हें अंकित किया गया है।

Abstract

Integration with respect to parameeters. *By* P. C. Golas, Lecturer in Mathematics, Government College, Kotputli, Jaipur (Rajasthan).

The aim of this paper is to integrate the H-function with respect to parameters . The method employed is that of operational calculus. Since H-function is a generalization of Meijer's G-function, integration with respect to parameters of known functions follow as particular cases of our result.

1. इस टिप्पणी में निम्नांकित संकेतों का व्यवहार किया जावेगा:—

$$S\{\phi(t);\, s\}=\int_0^\infty (s+t)^{-1}\,\phi(t)\,dt, \tag{1.1}$$

$$S_1\{\phi(t);\, a;\, s\}=s^{a-1}\int_0^\infty (s+t)^{-a}\,\phi(t)\,dt \tag{1.2}$$

$$F\{\phi(t);\, a,\ b;\ s\}=\frac{\Gamma(a)\,s^{-1}}{\Gamma(b+1)}\int_0^\infty {}_2F_1(a,\, b;\, b+1;-t/s)\,\phi(t)\,dt \tag{1.3}$$

जहाँ $b\neq-1, -2, -3, \ldots$.

(1.3) सम्बन्ध (1.1) तथा (1.2) में परिणत हो जाता है यदि क्रमशः $a=2$, $b=1$ तथा $a=b+1$

2. H-फलन की परिभाषा तथा गुणधर्म

हमारी H-फलन की परिभाषा फाक्स [3, p. 408] द्वारा प्रयुक्त परिभाषा से प्राचलों के सम्बन्ध में कुछ भिन्न है। हम

$$(2.1)\qquad H_{p,q}^{m,n}\left[x\left|\begin{matrix}(a_1,e_1),\ (a_2,e_2),\ \ldots,\ (a_p,e_p)\\(b_1,f_1),\ (b_2,f_2),\ \ldots,\ (b_q,f_q)\end{matrix}\right.\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j-f_j\xi)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j+e_j\xi)\,x^{\xi}\,d\xi}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j+f_j\xi)\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j-e_j\xi)},$$

को पारिभाषित करेंगे जहाँ रिक्त गुणनफल (empty product) की विवेचना इकाई की जावेगी, $0\leqslant m\leqslant q$, $0\leqslant n\leqslant p$; सभी e तथा f धन होंगे; L बर्नीज प्रकार का उपयुक्त कंटूर है जिससे कि $\Gamma(b_j-f_j\xi)$, $j=1,2,\ldots m$ के ध्रुव कंटूर के दाहिनी ओर रहें तथा $\Gamma(1-a_j+e_j\xi)$, $j=1,2,\ldots n$ के बाईं ओर। साथ ही प्राचल इतने संकुचित हैं कि (2.1) के दाहिनी ओर का समाकल अभिसारी है।

यदि हम

$$\Gamma(mz)=(2\pi)^{1/2-m/2}\,.\,m^{mz-1/2}\prod_{j=0}^{m-1}\Gamma\left(z+\frac{j}{m}\right)$$

सूत्र को (2.1) के दाहिनी ओर व्यवहृत करें तो हमें H तथा G फलनों को जोड़ने वाला निम्नांकित सम्बन्ध प्राप्त होगा :—

$$(2.2)\qquad H_{p,q}^{m,n}\left[x\left|\begin{matrix}(a_1,s),\ldots,(a_p,s)\\(b_1,s),\ldots,(b_q,s)\end{matrix}\right.\right]=s^{-1}\,G_{p,q}^{m,n}\left(x^{-s}\left|\begin{matrix}a_1,\ \ldots,\ a_p\\b_1,\ \ldots,\ b_q\end{matrix}\right.\right)$$

जहाँ s धन पूर्णसंख्या है।

3. बाद में लेखक [4] द्वारा प्राप्त निम्नांकित परिणामों की आवश्यकता पड़ेगी :—

$$(3.1)\qquad F\left\{t^{l}H_{p,q}^{m,n}\left[zt^{\sigma}\left|\begin{matrix}(a_1,e_1),\ \ldots,\ (a_p,e_p)\\(b_1,f_1),\ \ldots,\ (b_q,f_q)\end{matrix}\right.\right];\ a,\ b;\ s\right\}$$

$$=\frac{S^{l}}{\Gamma(b)}\,H_{p,q}^{m,n}\left[zs^{\sigma}\left|\begin{matrix}(-l,\sigma),\ (a_1,e_1),\ \ldots,\ (a_p,e_p),\ (b-l,\sigma)\\(a-l-1,\sigma),\ (b-l-1,\sigma)\ (b_1,f_1),\ \ldots,\ (b_q,f_q)\end{matrix}\right.\right]$$

यदि

$$R(\sigma)>0,\ R(s)>0,\ R\left(l+1+\sigma\frac{b_h}{f_h}\right)>0,$$

$$R\left(b-l-1-\sigma\frac{b_h}{f_h}\right)>0,\ R\left(a-l-1-\sigma\frac{b_h}{f_h}\right)>0,\ h=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m$$

तथा निम्नांकित में से कोई भी एक दशा सन्तुष्ट हो जाय

(i) $\lambda>0,\ |\arg(z)|<\frac{1}{2}\pi\lambda,$

(ii) $\lambda\geqslant 0,\ |\arg(z)|\leqslant\frac{1}{2}\pi\lambda,\ R(\mu+1)>0,\ R(\mu+l+1)<0.$

यहाँ λ तथा μ क्रमशः

$$\sum_{j=1}^{n}(e_j)-\sum_{j=n+1}^{p}(e_j)+\sum_{j=1}^{m}(f_j)-\sum_{j=m+1}^{q}(f_j)$$

तथा

$$\frac{1}{2}(p-q)+\sum_{j=1}^{q}(b_j)-\sum_{j=1}^{p}(a_j)$$

मात्राओं के लिए प्रयुक्त हैं।

यदि हम क्रमशः $a=2$, $b=1$ तथा $a=b+1$ मान लें तो सम्बन्ध (3.1) निम्नांकित फलनों में परिणत हो जावेगा:—

$$S\left\{t^l H_{p,q}^{m,n}\left[zt^\sigma\middle|\begin{matrix}(a_1,e_1),\ldots,(a_p,e_p)\\(b_1,f_1),\ldots,(b_q,f_q)\end{matrix}\right];s\right\}$$

(3.2)

$$=s^l H_{p+1,q+1}^{m+1,n+1}\left[zs^\sigma\middle|\begin{matrix}(-l,\sigma),(a_1,e_1),\ldots,(a_p,e_p)\\(-l,\sigma),(b_1,f_1),\ldots,(b_q,f_q)\end{matrix}\right]$$

जहाँ $R(\sigma)>0$, $R(s)>0$ तथा $0>R\left(l+\sigma\frac{b_h}{f_h}\right)>-1,\ h=0,\ 1,\ 2,\ldots m$ वैधता के लिए अन्य प्रतिबन्धों (3.1) का कोई एक प्रतिबंध हो सकता है।

$$S_1\left\{t^l H_{p,q}^{m,n}\left[zt^\sigma\middle|\begin{matrix}(a_1,e_1),\ldots,(a_p,e_p)\\(b_1,f_1),\ldots,(b_q,f_q)\end{matrix}\right];b;s\right\}$$

(3.3)

$$=\frac{s^l}{\Gamma(b)} H_{p+1,q+1}^{m+1,n+1}\left[zs^\sigma \middle| \begin{matrix}(-l,\sigma),(a_1,e_1),\ldots,(a_p,e_p)\\(b-l-1,\sigma),(b_1,f_1),\ldots,(b_q,f_q)\end{matrix}\right]$$

यदि $R(\sigma)>0, R(s)>0, R\left(b-l-\sigma\frac{b_h}{f_h}\right)>0, R\left(l+1+\sigma\frac{b_h}{f_h}\right)>0, h=0, 1, 2, \ldots m.$

वैधता के अन्य प्रतिबन्धों में से (3.1) का कोई भी एक प्रतिबन्ध हो सकता है।

4. प्रमेय

यदि $\phi=0(t^{l-1}),\ R(a)>R(b)>R(l)>0$

तो

$$\int_0^\infty {}_1F_0\left(a;\ ;-\frac{tu}{s}\right)\phi(t)dt$$

(4.1)

$$=\frac{s}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} u^{-b}F\{\phi(t);\ a, b; s\}\, db.$$

उपपत्ति :—सम्बन्ध [1, p. 116] का प्रयोग करते हुये

$${}_2F_1(a,b;c;Z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)}\int_0^\infty e^{-bt}(1-e^{-t})^{c-b-1}(1-Ze^{-t})^{-a}dt$$

तथा चर में $e^{-t}=u$ प्रतिस्थापन द्वारा परिवर्तन लाने पर

(4.2)

$${}_2F_1(a, b; b+1;-t/s)=\frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(a)}\int_0^\infty u^{b-1}\left(1+\frac{tu}{s}\right)^{-a}du.$$

प्राप्त होगा। अतः (1.3) में (4.2) का प्रयोग करने पर हमें

(4.3)

$$\frac{\Gamma(a)s^{-1}}{\Gamma(b+1)}\int_0^\infty {}_2F_1(a, b; b+1;-t/s)\phi(t)dt$$

$$=s^{-1}\int_0^\infty \phi(t)dt\int_0^\infty u^{b-1}\left(1+\frac{tu}{s}\right)^{-a}du.$$

प्राप्त होगा।

(4.3) में दाईं ओर समाकलन-क्रम को उलट देने पर

$$s^{-1}\int_0^\infty u^{b-1}du\int_0^\infty\left(1+\frac{tu}{s}\right)^{-a}\phi(t)\,dt.$$

मेलिन परिवर्त [2, p. 307] के लिये व्युत्क्रम-सूत्र का व्यवहार करने पर हमें उक्त प्रमेय की प्राप्ति

$$\left(1+\frac{tu}{s}\right)^{-a} \equiv {}_1F_0\left(a;\ ;-\frac{tu}{s}\right).$$

तत्समक के प्रयोग करने पर होती है।

(4.3) में u समाकल पूर्णतः अभिसारी है यदि $R(a)>R(b)>0$, (4.3) के दाहिनी ओर का t-समाकल पूर्णतः अभिसारी है यदि $R(a)>R(l)>0$ तथा (4.3) के बाईं ओर का परिणामी समाकल अभिसारी है यदि $R(a)>R(b)>R(l)>0$. अतः प्रमेय में कथित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत समाकलन के क्रम में परिवर्तन करना न्यायसंगत है।

उदाहरण—(3.1) से हमें,

$$F\left\{t^l H_{p,q}^{m,n}\left[\begin{matrix}(1-a_1, e_1), \ldots, (1-a_p, e_p)\\(1-b_1, f_1), \ldots, (1-b_q, f_q)\end{matrix}\right]; a, b; s\right\}$$

$$=\frac{s^l}{\Gamma(b)} H_{q+2,p+2}^{n+1,m+2}\left[zs^{-\sigma}\middle|\begin{matrix}(l+2-a, \sigma), (l+2-b, \sigma), (b_1, f_1), \ldots, (b_q, f_q)\\(l+1, \sigma), (a_1, e_1), \ldots, (a_p, e_p), (l+1-b, \sigma)\end{matrix}\right].$$

प्राप्त होता है।

यही नहीं, (3.3) से यह भी प्राप्त होता है कि

$$\int_0^\infty \left(1+\frac{tu}{s}\right)^{-a} . t^l H_{p,q}^{m,n}\left[z^{-1} t^\sigma \middle|\begin{matrix}(1-a_1, e_1), \ldots, (1-a_p, e_p)\\(1-b_1, f_1), \ldots, (1-b_q, f_q)\end{matrix}\right] dt$$

$$=\frac{(s/u)^{l+1}}{\Gamma(a)} H_{q+1,p+1}^{n+1,m+1}\left[z\left(\frac{u}{s}\right)^\sigma \middle|\begin{matrix}(l-a+2, \sigma), (b_1, f_1), \ldots, (b_q, f_q)\\(l+1, \sigma), (a_1, e_1), \ldots, (a_p, e_p)\end{matrix}\right].$$

(4.1) में इन मानों का प्रयोग करने पर हमें

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{u^{-b}}{\Gamma(b)} H_{q+2,p+2}^{n+1,m+2}\left[zs^{-\sigma}\middle|\begin{matrix}(l-a+2, \sigma)(l-b+2, \sigma), (b_1, f_1), \ldots, (b_q, f_q)\\(l+1, \sigma), (a_1, e_1), \ldots, (a_p, e_p), (l-b+1, \sigma)\end{matrix}\right] db$$

(4.5)

$$=\frac{s^{-1} u^{-l-1}}{\Gamma(a)} H_{q+1,p+1}^{m+1,n+1}\left[z\left(\frac{u}{s}\right)^\sigma \middle|\begin{matrix}(l-a+2, \sigma), (b_1, f_1), \ldots, (b_q, f_q)\\(l+1, \sigma), (a_1, e_1), \ldots, (a_p, e_p)\end{matrix}\right],$$

प्राप्त होगा यदि निम्नांकित दशायें सन्तुष्ट हों :—

(i) $\lambda>0$, $|\arg(z)|<\frac{1}{2}\pi\lambda$,
$|\arg(u)|<\pi/2$,

(ii) $\lambda\geqslant 0$, $|\arg(z)|\leqslant\frac{1}{2}\pi\lambda$,
$|\arg(u)|<\frac{1}{2}\pi$,

तथा

$$R(l+1+\tfrac{1}{2}p-\tfrac{1}{2}q+\sum_{j=1}^{q}(b_j)-\sum_{j=1}^{p}(a_j))<0,$$

जहाँ (3·1) में λ एक ही मात्रा के लिये प्रयुक्त हुआ है।

एक विशिष्ट दशा :—यदि हम (4·5) में e तथा f को इकाई के बराबर मान लें और फिर $\sigma=1$ रखें तो

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{u^{-b}}{\Gamma(b)}G_{q+2,\,p+2}^{n+1,\,m+2}\left(\frac{z}{s}\middle|\begin{matrix}l-a+2,\, l-b+2,\, b_1,\ldots,\, b_q\\ l+1,\, a_1,\ldots,\, a_p,\, l+1-b\end{matrix}\right)db$$

(4·6)

$$=\frac{s^{-1}\cdot u^{l-1}}{\Gamma(a)}G_{q+1,\,p+1}^{n+1,\,m+1}\left(\frac{zu}{s}\middle|\begin{matrix}l-a+2,\, b_1,\ldots,\, b_q\\ l+1,\, a_1,\ldots,\, a_p\end{matrix}\right)$$

प्राप्त होगा जहाँ $|\arg(u)|<\tfrac{1}{2}\pi$ तथा निम्नांकित में से एक प्रतिबन्ध की संतुष्टि हो :—

(i) $(m+n-\tfrac{1}{2}p-\tfrac{1}{2}q)>0,\ |\arg(z/s)|<(m+n-\tfrac{1}{2}p-\tfrac{1}{2}q)\tfrac{1}{2}\pi,$

(ii) $(m+n-\tfrac{1}{2}p-\tfrac{1}{2}q)\geqslant 0,\ |\arg(z/s)|\leqslant(m+n-\tfrac{1}{2}p-\tfrac{1}{2}q)\tfrac{1}{2}\pi$

तथा

$$R(l+1+\tfrac{1}{2}p-\tfrac{1}{2}q+\sum_{j=1}^{q}(b_j)-\sum_{j=1}^{p}(a_j))<0.$$

निर्देश

1. Bateman Manuscript Project. Higher Transcendental Functions, **भाग I**, **मकग्राहिल, न्यूयार्क** 1953.
2. Bateman Manuscript Project. Tables of Integral Transforms, **भाग I**, **मकग्राहिल, न्यूयार्क** 1954.
3. फाक्स, सी०। **टांजै० अमे० मैथ० सोसा०**, 1961, 98, 408.
4. गोलस, पी० सी०। **प्रोसी० नेश० एके० साइं० इंडिया (प्रषित)**।

विज्ञान परिषद् अनुसंधान पत्रिका
1968, **11**, 77-79

VIJNANA PARISHAD
ANUSANDHAN PATRIKA
1968, **11**, 77-79

इंडोल व्युत्पन्नों की जैविक उत्पत्ति पर टिप्पणी

रवीन्द्र प्रताप राव
रसायन विभाग, गोरखपुर विश्वविद्यालय, गोरखपुर

[प्राप्त—नवम्बर 4, 1967]

सारांश

यह प्रस्तावित किया गया है कि इंडोलों के जैविक निर्माण में टार्टरिक अम्ल महत्वपूर्ण भाग ले सकता है। पौदों में टार्टरिक अम्ल की व्यापक उपस्थिति होने तथा इसका शीघ्र ही डाइहाइड्राक्सी मैलीक अम्ल में परिवर्तन होने के फलस्वरूप यह सम्भव है कि इंडोलों का निर्माण डाइहाइड्राक्सी मैलीक अम्ल, डाइ-हाइड्राक्सी-एक्राइलिक अम्ल या ग्लाइकोलिक ऐल्डीहाइड के माध्यम से होता हो।

Abstract

A note on the biogenetic formation of indole derivatives. *By* Ravindra Pratap Rao, Department of Chemistry, University of Gorakhpur.

It has been suggested that tartaric acid might be playing a role in the biogenetic formation of indoles. The wide occurrence of tartaric acid in plants and its ready conversion to dihydroxy maleic acid points to an attractive idea that tartaric acid may produce indoles through dihydroxy maleic acid, dihydroxy acrylic acid or glycollic aldehyde.

अध्ययनों के फलस्वरूप[1–5] यह स्थापित हो चुका है कि पौदों (न्यूरोस्पोरा) में ट्राइप्टोफेन के जैविक निर्माणों में ऐंथ्रानिलिक अम्ल तथा उसके अन्य व्युत्पन्नों का उपयोग पूर्वगामी के रूप में होता है जिसके फलस्वरूप ऐंथ्रानिलिक अम्ल का कार्बोक्सिल कार्बन इंडोल में परिवर्तन होते समय विलुप्त हो जाता है।

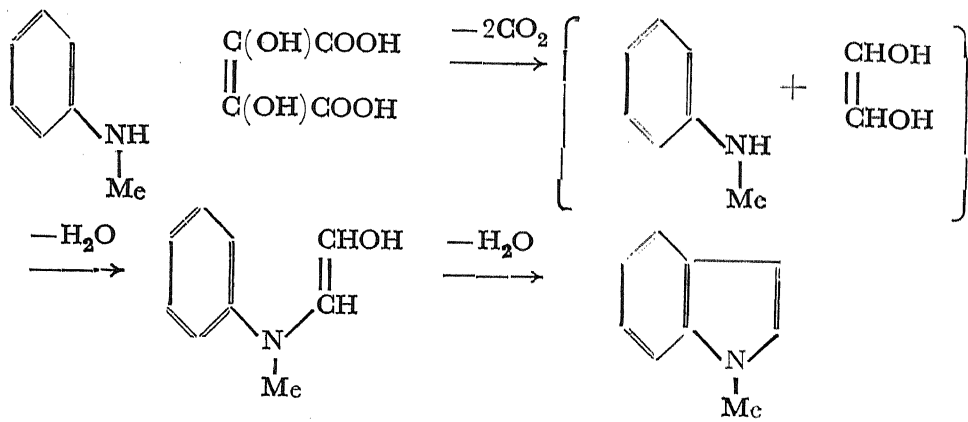
ऐंथ्रानिलिक अम्ल→इंडोल→ट्राइप्टोफेन

हार्ले-मेसन[6] ने उस खण्ड को जो ऐंथ्रानिलिक अम्ल के साथ संयुक्त होकर इंडोल बनाता है उसे ग्लाइकोलिक ऐल्डीहाइड के रूप में प्रदर्शित किया है। इस प्रकार की विचार धारा प्रस्तुत शोध निबन्ध में सूचित परिणाम के सर्वथा अनुकूल है।

हमने देखा है कि *N*-मेथिलएनिलीन को डाइहाइड्राक्सी मैलीक अम्ल के साथ जल में गरम करने से *N*-मेथिल इंडोल बनता है। *N*-मेथिल इंडोल की पहचान 6 *N* हाइड्रोक्लोरिक अम्ल[7] की अधिकता में p-डाइमेथिल ऐमिनोबेंजेल्डीहाइड द्वारा उत्पन्न रंग की तुलना एक मानक नमूने द्वारा उत्पन्न रंग से करके की गई। इसकी पुष्टि पत्र-क्रोमैटोग्राफी द्वारा की गई जिसमें व्हाटमैन फिल्टर पत्र नं० 1 का प्रयोग किया गया और ब्यूटैनाल-ऐसीटिक अम्ल जल (60 : 15 : 25) विलायक व्यवहृत हुआ। R_F मान 0·93 से 0·94 तक प्राप्त हुये। पतले स्तर की क्रोमैटोग्राफी का भी उपयोग किया गया।

इससे हार्ले-मेसन द्वारा प्रस्तावित अभिक्रिया-प्रक्रिया का अनुमोदन होता है।

$$\text{C}_6\text{H}_5\text{NHMe} + \begin{matrix}\text{C(OH)COOH}\\ \|\\ \text{C(OH)COOH}\end{matrix} \xrightarrow{-2CO_2} \left[\text{C}_6\text{H}_5\text{NHMe} + \begin{matrix}\text{CHOH}\\ \|\\ \text{CHOH}\end{matrix}\right]$$

$$\xrightarrow{-H_2O} \text{C}_6\text{H}_5\text{N(Me)}-\begin{matrix}\text{CH}\\ \|\\ \text{CHOH}\end{matrix} \xrightarrow{-H_2O} \text{N-Me indole}$$

एक अन्य मार्ग डाइहाइड्राक्सी एक्राइलिक अम्ल से होकर भी हो सकता है जिसमें डाइहाइड्राक्सी मैलीक अम्ल सरलता से विकार्बोक्सिलित होता है।

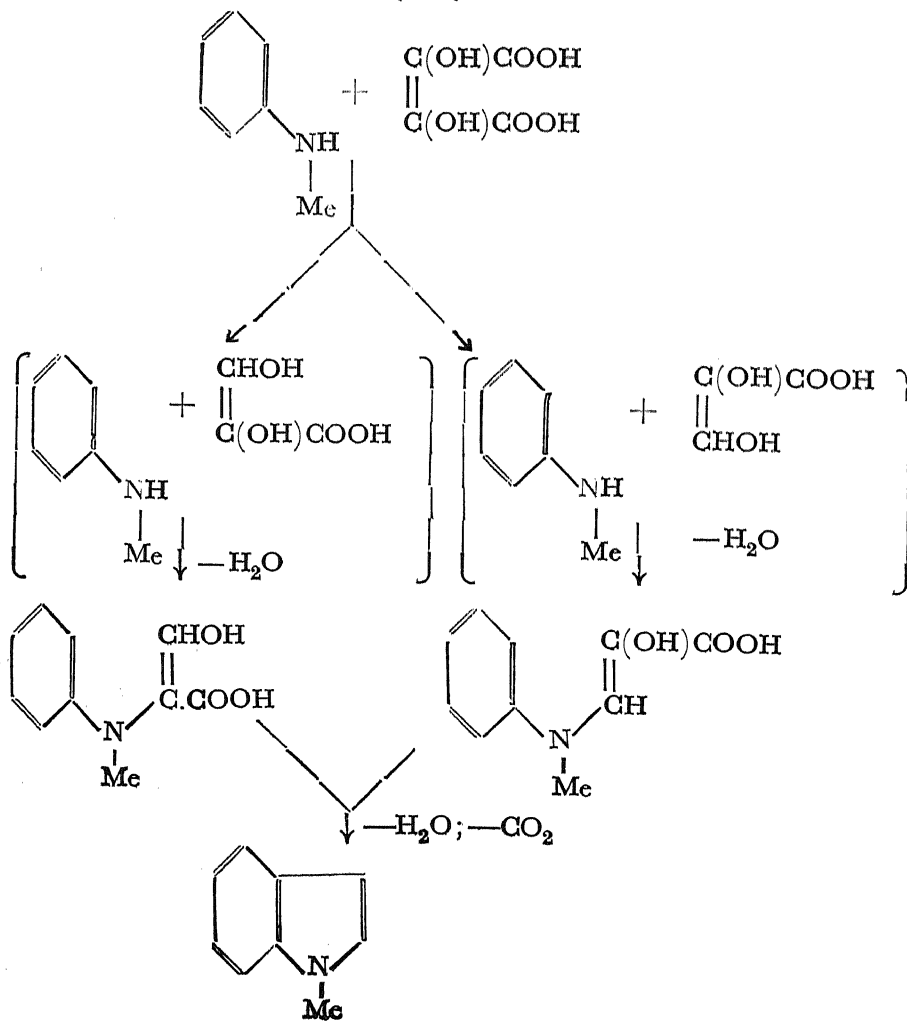
$$\text{C}_6\text{H}_5\text{NHMe} + \begin{matrix}\text{C(OH)COOH}\\ \|\\ \text{C(OH)COOH}\end{matrix}$$

$$\left[\text{C}_6\text{H}_5\text{NHMe} + \begin{matrix}\text{CHOH}\\ \|\\ \text{C(OH)COOH}\end{matrix}\right] \qquad \left[\text{C}_6\text{H}_5\text{NHMe} + \begin{matrix}\text{C(OH)COOH}\\ \|\\ \text{CHOH}\end{matrix}\right]$$

$$\downarrow -H_2O \qquad\qquad \downarrow -H_2O$$

$$\text{C}_6\text{H}_5\text{N(Me)}-\begin{matrix}\text{C.COOH}\\ \|\\ \text{CHOH}\end{matrix} \qquad \text{C}_6\text{H}_5\text{N(Me)}-\begin{matrix}\text{CH}\\ \|\\ \text{C(OH)COOH}\end{matrix}$$

$$\downarrow -H_2O; -CO_2$$

$$\text{N-Me indole}$$

1894 ई० में ही फेण्टन[8] द्वारा यह प्रदर्शित किया जा चुका है कि फेरस लवणों की उपस्थिति में वायु तथा प्रकाश के अनुप्रभाव से टार्टरिक अम्ल से डाइहाइड्राक्सी मैलीक अम्ल उत्पन्न होता है। पौदों में व्यापक उपस्थिति के कारण तथा सरलता से डाइहाइड्राक्सी मैलीक अम्ल में परिवर्तित हो जाने के कारण यह अत्यन्त मोहक कल्पना प्रतीत होती है कि टार्टरिक अम्ल डाइहाइड्राक्सी मैलीक अम्ल, डाइहाइड्राक्सी एक्राइलिक अम्ल या ग्लाइकोलिक ऐल्डीहाइड से होकर इंडोलों की जैविक उत्पत्ति में सहायक हो।

निर्देश

1. टैटम, ई० एल०, बोनर, डी० एम० तथा बीडल, जी० डब्लू०। **आर्का० बायोके०**, 1944, **3**, 477.
2. बीडल, जी० डब्लू०, मिचेल, एच० के० तथा नाइस, जे० एफ०। **प्रोसी० नेश० एके० साइं०**, 1947, **33**, 155.
3. मिचेल, एच० के० तथा नाइस, जे० एफ०। **वही**, 1948, **34**, 1.
4. नाइस, जे० एफ०, मिचेल, एच० के०, प्लाइफर, ई० तथा लैंघम, डब्लू० एच०। **जर्न० बायोला० केमि०**, 1949, **197**, 783.
5. यानोफ्स्की, सी०। **साइंस**, 1955, **121**, 138.
6. हार्ले-मेसन, जे०। **केमि० इण्ड०**, 1955, 355.
7. चेर्नोफ। **इण्ड० इंजी० केमि० एनालिटि०**, 1940, **12**, 273.
8. फेण्टन, एच० जे० एच०। **जर्न० केमि० सोसा०**, 1894, 899.

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका
1968, **11**, 81-83

VIJNANA PARISHAD
ANUSANDHAN PATRIKA
1968, **11**, 81-83

ट्राइकोलेपिस प्रोकम्बेन्स का रासायनिक परीक्षण--भाग २

भुवनचन्द्र जोशी
रसायन विभाग, राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर

[प्राप्त—नवम्बर 9, 1967]

सारांश

ट्राइकोलेपिस प्रोकम्बेन्स पौदे से पृथक किये गये ग्लुकोसाइड प्रोकम्बेनिन-ए के अ-ग्लाइकोन 'प्रोकम्बे-निडीन-ए" का विस्तार से अध्ययन किया गया।

Abstract

Chemical examination of tricholepis procumbens. Part II. *By* B. C. Joshi, Department of Chemistry, Rajasthan University, Jaipur.

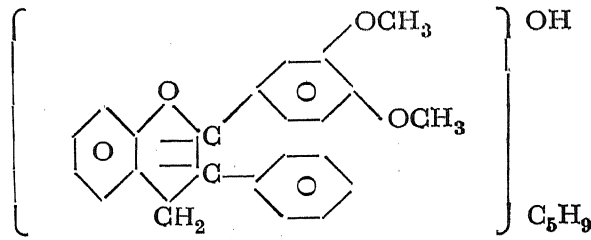
The aglycone 'Procumbenidine A' of glucoside procumbenin A isolated from the plant Tricholepis Procumbens have been studied in a greater detail.

ट्राइकोलेपिस प्रोकम्बेन्स नामक पौदे से एक ग्लुकोसाइडीय रंजक पदार्थ—प्रोकैम्बेनिन ($C_{34}H_{42}O_{11}$) पृथक किया गया। जलअपघटन के पश्चात् इस दो मेथाक्सी समूह वाले ग्लुकोसाइड से ग्लुकोस तथा एक अग्लाइकोन प्रोकम्बेनिडीन A प्राप्त हुये।

प्रोकम्बेनिडीन A में दो मेथाक्सी तथा तीन हाइड्राक्सी समूह प्राप्त हुये। अग्लाइकोन को 50% नाइट्रिक अम्ल से आक्सीकृत करने पर तीन अम्ल प्राप्त हुए। इनमें से एक अम्ल बेंजोइक अम्ल था। दूसरे अम्ल में तीन हाइड्राक्सिल समूह पाये गये और इसकी पहचान 2, 4, 6-ट्राइहाइड्राक्सी बेंजोइक अम्ल के रूप में की गई। इस अम्ल को सोडा लाइम के साथ ऊर्ध्वपातन करने से फ्लोरोग्लुसिनॉल (217-218°) प्राप्त हुआ। इस अम्ल का एथिल एस्टर ($C_9H_{10}O_5H_2O$) (गलनांक 127-128°) पहले रजत लवण तथा बाद में एथिल आयोडाइड के उपचार द्वारा प्राप्त किया गया। तीसरे अम्ल, $C_9H_{10}O_4$ (गलनांक 180-181°) में दो मेथाक्सी तथा एक कार्बोक्सिल समूह पाये गये। यह अम्ल 3, 4-डाइ-मेथाक्सी बेंजोइक अम्ल के रूप में निर्धारित हुआ और इसकी तुलना एक मौलिक नमूने से की गई। अग्लाइ-कोन के अवरक्त स्पेक्ट्रम से हाइड्राक्सिल अवशोषण (γ=3320 सेमी०$^{-1}$) की सूचना मिली तथा 1550-1400 सेमी०$^{-1}$ पर ऐरोमैटीय वलयों के अभिलाक्षणिक अवशोषण-पट्ट प्राप्त हुये। अ-ग्लाइकोन के N.m.r स्पेक्ट्रम (द्रव सल्फर डाइ आक्साइड में) से दस ऐरोमैटीय प्रोटानों (6.8-7.2 ppm), दो मेथाक्सी

समूहों (3.8 ppm) के छः प्रोटानों तथा $>CH_2$ एवं $>CH$ वर्ग (0.9-2.1 ppm) के तेरह प्रोटानों के संकेत मिले।

उपर्युक्त विवेचना से अ-ग्लाइकोन की सम्भावित संरचना निम्न प्रकार हो सकती है:

OCH₃ OH OCH₃ O C C CH₂ O O O C₅H₉

प्रयोगात्मक

6·2 ग्रा० अग्लाइकोन को 40 मिलि० नाइट्रिक अम्ल के साथ मिलाकर मिश्रण को 6–8 घंटे तक पश्चवाहित किया गया। इसके पश्चात् विलयन को हिम-शीतल जल में उडेल दिया गया और इसमें सोडियम बाइकार्बोनेट का संतृप्त विलयन तब तक मिलाया गया जब तक कि विलयन उदासीन नहीं हो गया। इसके पश्चात् विलयन को निर्वात में सान्द्रित किया गया। गरम जलीय विलयन को छान कर उसे सान्द्रित करके **प्रभाज–1** प्राप्त किया गया। अविलेय अंश में से एथैनाल द्वारा ठोस (**प्रभाज**-2) तथा मातृद्रव प्राप्त किये गये।

प्रभाज-1—अम्ल को एथैनाल से क्रिस्टलित किया गया (गलनांक 120-121°)। यह बेंजोइक अम्ल के ही समान निकला।

प्रभाज-2—द्वितीय प्रभाज को ऐसीटोन से क्रिस्टलित किया गया। इसका गलनांक 180-181° निकला। एक विशुद्ध नमूने से इसकी तुलना की गई और इनका मिश्रित गलनांक निकाला गया किन्तु कोई अवनमन नहीं दिखा।

$C_9H_{10}O_4$ के लिये **परिगणित मान**

C=59·34, H=5·49

मेथाक्सी समूह (दो समूहों के लिए)=34·06.

प्राप्त मान : C=59·62, H=5·24.

मेथाक्सी समूह=34.68

अतः अम्ल को 3, 4–डाइमेथाक्सी बेंजोइक अम्ल के रूप में निर्धारित किया गया।

प्रभाज-3—मातृद्रव को निर्वात में सान्द्रित करने पर चाशनी जैसा पिंड प्राप्त हुआ। इससे कोई क्रिस्टलीय पदार्थ नहीं बना। फलतः इस अवशेष को पहले रजत लवण में परिणत करके और फिर इसे एथिल

आयोडाइड के साथ उपचारित करके एस्टरीकरण किया गया। ठोस को लिग्राइन से क्रिस्टलित किया गया (गलनांक 129°)।

$C_9H_{10}O_5.H_2O$ के लिये **परिगणित मान**

C=50·0, H=5·55

प्राप्त मान :

C=50·16, H=5·43.

इन क्रिस्टलों को 36 घंटे तक 55-60° पर (उच्च निर्वात) गरम करके अजल यौगिक प्राप्त किया गया।

$C_9H_{10}O_5$ के लिये **परिगणित मान**

C=54·59 H=5·05

प्राप्त मान :

C=55·12, H=5·25.

इससे यह निष्कर्ष निकाला गया कि यह 2, 4, 6–ट्राइ-हाइड्राक्सी बेंजोइक अम्ल का एथिल एस्टर है।

अवरक्त स्पेक्ट्रम द्वारा 3355 सेमी०$^{-1}$ पर अवशोषण प्राप्त हुआ, किन्तु कोई चौड़ा अवशोषण (कार्बोक्सिलीय अम्ल) नहीं मिला। एस्टर के लिये 5·85 पर अवशोषण देखा गया। इस प्रकार इसकी पुष्टि हाइड्राक्सी अम्ल के एस्टर के रूप में हुई। ऐल्कोहलीय फेरिक क्लोराइड द्वारा रंग-परिवर्तन से फेनालीय हाइड्राक्सिलीय समूह की उपस्थिति सिद्ध होती है।

प्रभाज-3 के अशुद्ध अंश का सोडा लाइम संगलन :—

प्रभाज-3 के अशुद्ध पदार्थ को सोडा-लाइम के साथ मिश्रित किया गया और मिश्रण का ऊर्ध्वपातन किया गया। ऊर्ध्वपातज को गरम ऐल्कोहाल से क्रिस्टलित किया गया (गलनांक 217–218°)।

इस पदार्थ के साथ ऐल्कोहलीय फेरिक क्लोराइड विलयन ने नीला बैंजनी रंग प्रदान किया। तुलना करने पर यह फ्लोरोग्लुसिनॉल के समान सिद्ध हुआ।

विज्ञान परिषद् अनुसंधान पत्रिका
1968, **11**, 85-90

VIJNANA PARISHAD
ANUSANDHAN PATRIKA
1968, **11**, 85-90

आत्मव्युत्क्रम फलनों की कुछ विशेषताएँ

वी० वी० एल० नरसिंघ राव
गणित विभाग, उस्मानिया विश्वविद्यालय, हैदराबाद

[प्राप्त—नवम्बर 1, 1967]

सारांश

इस अभिपत्र में आत्म व्युत्क्रम फलनों के दो प्रमेय निरूपित किये गये हैं।

Abstract

Some properties of self reciprocal functions. *By* V. V. L. N. Rao, Department of Mathematics, Osmania University, Hyderabad.

Two properties of self reciprocal functions in the form of theorems have been established.

इस अभिपत्र में हम आत्मव्युत्क्रम फलनों के कुछ प्रमेय निरूपित करेंगे। हार्डी और टिश्मार्श[1] के अनुसार हम फलन $f(x)$ को हैंकेल परिवर्त में R_μ मानेंगे जिसे सूत्र

$$f(x)=\int_0^\infty \mathcal{J}_\mu(xy)\, f(y)\, \sqrt{xy}\; dy, \qquad \ldots \quad (1.1)$$

द्वारा व्यक्त किया जाता है, जिसमें $\mathcal{J}_\mu(x)$ एक बेसिल फलन है। $\mu=\frac{1}{2}$ और $-\frac{1}{2}$ होने पर $f(x)$ को क्रमशः R_s और R_c लिखेंगे।

प्रमेय 1. फलन $f(x)$, $g(x)$ परिवर्त में आत्मव्युत्क्रम होने पर, $f(x)$ सूत्र

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty F(s)\, G(1-s)\, x^{(s-1)}\, ds, \qquad \ldots \quad (1.2)$$

द्वारा व्यक्त किया जाता है जिसमें $F(s)$ और $G(s)$ क्रमशः $f(x)$ और $g(x)$ के मेल्लिन[2] परिवर्त हैं।

उपपत्ति : $F(s)$ और $G(s)$ क्रमशः $f(x)$ और $g(x)$ के मेल्लिन परिवर्त होने पर हम यह देखते हैं कि

$$\int_0^\infty g(x)\, x^{(s-1)}\, dx=G(s) \qquad \ldots \quad (1.3)$$

और

$$\int_0^\infty f(x)\, x^{(s-1)}\, dx = F(s). \quad \ldots \quad (1.4)$$

इसके अतिरिक्त टिश्मार्श[3] ने निरूपित किया है कि

$$\int_0^\infty f(ax)\, g(bx)\, dx = \frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} F(s)\, G(1-s)\, a^s\, b^{(s-1)}\, ds, \quad (1.5)$$

$a=1$, रखने पर और b के स्थान में y लिखने पर

$$\int_0^\infty f(x)\, g(yx)\, dx = \frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} F(s)\, G(1-s)\, y^{(s-1)}\, ds. \quad \ldots \quad (1.6)$$

यदि $f(x)$, $g(x)$ के परिवर्त में आत्मव्युत्क्रम हो तो हम देखते हैं कि

$$\int_0^\infty f(x)\, g(xy) = f(y). \quad \ldots \quad (1.7)$$

इससे

$$f(y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} F(s)\, G(1-s)\, y^{(s-1)}\, ds. \quad \ldots \quad (1.8)$$

यदि फलन $f(x)$ होने पर ,अष्टि $g(x)$ R_μ से R_ν में परिवर्त करता है और यदि R_ν फलन

$$\phi(y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \Gamma(s)\, G(1-s)\, y^{(s-1)}\, ds, \quad \ldots \quad (1.9)$$

उदाहरण 1. टिश्मार्श[4] ने सिद्ध किया है कि

$$\int_0^\infty x^{(s-1)}\, e^{x^2/4}\, D_n(x)\, dx = \frac{\Gamma(s)\,\Gamma(-\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}s)}{2^{x/2+n/2+1}\,\Gamma(-x)} \quad \ldots \quad (1.10)$$

जिसमें $n<0$.

$n=-1$ होने पर

$$\int_0^\infty x^{(s-1)}\, e^{x^2/4}\, D_{-1}(x)\, dx = \frac{\Gamma(s)\,\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}s)}{2^{1/2+s/2}}. \quad \ldots \quad (1.11)$$

अतएव हम देखते हैं कि

$$e^{x^2/4}\, D_{-1}(x) \text{ और } \frac{\Gamma(s)\,\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}s)}{2^{1/2+s/2}}. \quad \ldots \quad (1.12)$$

मल्लिन परिवर्तन के फलन होते हैं। इसके अतिरिक्त टिश्मार्श ने सिद्ध किया है कि फलन

$$e^{x^2/4}\, x^{\nu-1/2}\, D_{-2\nu}\,(x), \qquad \ldots \quad (1.13)$$

R_ν है। अतएव $\nu=\frac{1}{2}$ होने पर हम देखते हैं कि

$$e^{x^2/4}\, D_{-1}\,(x) \qquad \ldots \quad (1.14)$$

R_s होता है।

इसके अतिरिक्त टिश्मार्श[3] ने आगे सिद्ध किया है कि

$$x^\nu\, K_\nu\,(x) \text{ और } 2^{s+\nu-2}\, \Gamma\,(\tfrac{1}{2}s)\, \Gamma.(s/2+\nu) \qquad \ldots \quad (1.15)$$

दोनों मेल्लिन परिवर्त के फलन होते हैं, जिसमें $R(s) > [\max 0,-2R(s)]$

अतएव

$$\int_0^\infty x^{(s-1)}\, x^\nu\, K_\nu\,(x)\, dx = 2^{s+\nu-2}\, \Gamma(\tfrac{1}{2}s)\, \Gamma(\tfrac{1}{2}s+\nu). \qquad (1.16)$$

$\nu=0$ रखने पर और s के स्थान में $(s+1)$ रखने पर हम देखते हैं कि

$$\int_0^\infty x^{(s-1)}\, x\, K_0\,(x)\, dx = 2^{(s-1)}\, [\Gamma(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}s)]^2. \qquad \ldots \quad (1.17)$$

अतएव

$$x\, K_0(x) \text{ और } 2^{(s-1)}\, [\Gamma(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}s)]^2, \qquad \ldots \quad (1.18)$$

दोनों फलन मेल्लिन परिवर्तन के फलन होते हैं। इसके अतिरिक्त ब्रजमोहन[4] ने सिद्ध किया है कि अष्टि

$$x\, K_0\,(x), \qquad \ldots \quad (1.19)$$

R_s से R_s में परिवर्त करता है।

अब मान लो कि

$$f(x)=e^{x^2/4}\, D_{-1}\,(x) \qquad \ldots \quad (1.20)$$

जिसका मेल्लिन परिवर्त

$$F(s)=\frac{\Gamma(s)\, \Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}s)}{2^{1/2+s/2}}, \qquad \ldots \quad (1.21)$$

है, और

$$g(x)=x\, K_0\,(x), \qquad \ldots \quad (1.22)$$

जिसका मेल्लिन परिवर्त

$$G(s)=2^{(s-1)}\,[\Gamma(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}s)]^2, \quad . \quad . \quad . \quad (1.23)$$

है। अतएव (1·19) और (1·20) से हम देखते हैं कि

$$\int_0^\infty e^{x^2/4}\,D_{-1}\,(x)\;xy\,K_0\,(xy)\,dx=\phi(y) \quad . \quad . \quad . \quad (1.24)$$

R_s है। इसके अतिरिक्त (1·20) और (1·22) में दिए फलनों को सूत्र (1·6) में प्रयुक्त करने पर हमें

$$\int_0^\infty e^{x^2/4}\,D_{-1}\,(x)\;xy\,K_0\,(xy)\,dy$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\frac{\Gamma(s)\,\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}s)\,2^{-s}\,[\Gamma(1-\frac{1}{2}s)]^2}{2^{s/2+1/2}}\,y^{(s-1)}\,ds, \quad . \quad (1.25)$$

प्राप्त होता है।

इसके अतिरिक्त

$$\phi(y)=\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\frac{\Gamma(s)\,\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}s)}{2^{s/2+1/2}}\,2^{-s}\,[\Gamma(1-\tfrac{1}{2}s)]^2\,y^{(s-1)}\,ds. \qquad (1.26)$$

(1.26) में s के के स्थान पर $(s-1)$ लिखने पर और गामा फलनों के सूत्र का प्रयोग करने पर हमें

$$\phi(y)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(1-k)-i\infty}^{(1-k)+i\infty}2^{s/2}\,\Gamma(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}s)\,\Gamma(\tfrac{1}{2}s)\,\Gamma(1-\tfrac{1}{2}s)\,\Gamma(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}s)$$
$$\times\tfrac{1}{2}\,\Gamma(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}s)^{-s}\,ds.$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{(1-k)-i\infty}^{(1-k)+i\infty}2^{s/2}\,\Gamma(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}s)\,\psi(s)\,y^{-s}\,ds. \quad . \quad . \quad . \quad (1·27)$$

प्राप्त होता है जिसमें

$$\psi(s)=\Gamma(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}s)\,\Gamma(\tfrac{1}{2}s)\,\Gamma(1-\tfrac{1}{2}s)\,\Gamma(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}s)\,\tfrac{1}{2}$$
$$=\psi(1-s).$$

इसके अतिरिक्त यदि $0<K<1$, तो हम देखते हैं कि

$$\phi(4)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}2^{s/2}\,\Gamma(\tfrac{1}{4}+\mu/4+s/2)\,\phi(s)\,y^{-s}\,ds, \quad . \quad . \quad (1.28)$$

जिसमें $\qquad 0<c<1,$

और $\qquad \psi(s)=\psi(1-s).$

हार्डी और टिश्मार्श[1] ने सिद्ध किया है कि यदि $f(x)$ R_μ हो तो

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{l-i\infty}^{l+i\infty} 2^{s/2}\,\Gamma(\tfrac{1}{4}+\mu/2+s/2)\;\psi(s)\;x^{-s}\,ds, \quad \ldots \quad (1.29)$$

जिसमें $0<l<1$, और $\theta(s)=\theta(1-s)$

अतएव (1·28) और (1·29) से हम $\phi(y)=R_s$ प्राप्त करते हैं।

प्रमेय-2. यदि $f(x)$ R_μ तो

$$g(x)=\int_0^\infty \frac{f(xy)}{(1+y)}\,dy, \quad \ldots \quad (2.1)$$

R_μ होता है।

उपपत्ति : टिश्मार्श[1] ने सिद्ध किया है कि

$$\frac{1}{(1+x)\,a} \text{ और } \frac{\Gamma(s)\,\Gamma(a-s)}{\Gamma(a)} \quad \ldots \quad (2\cdot2)$$

मेल्लिन परिवर्तन के फलन हैं जिसमें $0<R(s)<R(a)$.

अतएव

$$\int_0^\infty x^{(s-1)}\,\frac{1}{(1+x)^a}\,dx=\frac{\Gamma(s)\,\Gamma(a-s)}{\Gamma(a)}, \quad \ldots \quad (2\cdot3)$$

जिसमें $0<R(s)<R(a)$.

$a=1$ होने पर और मेल्लिन परिवर्तन के सूत्र का प्रयोग करने पर हमें

$$\frac{1}{(1+x)}=\frac{1}{2\pi i}\int_{l-i\infty}^{l+i\infty}\Gamma(s)\,\Gamma(1-s)\,x^{-s}\,ds, \quad \ldots \quad (2\cdot4)$$

प्राप्त होता है जिसमें $0<l<1$

इसके अतिरिक्त ब्रजमोहन[5] ने सिद्ध किया है कि यदि $f(x)$ R_μ हो और

$$P(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\Gamma(\tfrac{1}{4}+\mu/2+s/2)\;\Gamma(\tfrac{1}{4}+\nu/2-s/2)\;\theta(s)\times x^{-s}\,ds, \quad (2\cdot5)$$

जिसमें $0<k<1$,

और $\theta(s)=\theta(1-s)$,

तब

$$g(x)=\int_0^\infty g(x)\,f(xy)\,dy. \quad \ldots \quad (2\cdot6)$$

R_ν है।

(2·4), (2·5) और (2·6) से पता चलता है कि

$$g(x)=\int_0^\infty \frac{f(xy)}{(1+y)}\,dy,$$

R_μ है, यदि $f(x)$ R_μ हो।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा० ब्रजमोहन का आभारी है जिन्होंने इस कार्य का निदशन किया।

निर्देश

1. हार्डी, जी० एच० तथा टिश्मार्श, ई० सी०। क्वार्ट० जर्न० मैथ० (आक्सफोर्ड सिरीज), 1930, **1** 196-231।
2. हार्डी, जी० एच०। मेसेंजर मैथ०, 1918, **47**, 178-84।
3. वही। Theory of Fourier Integrals (आक्सफोर्ड), 1937, पृ० 262, 197, 192।
4. ब्रजमोहन। जर्न० बनारस हिन्दू यूनि०, रजत जयंती अंक, 1942, 134-137।
5. वही। क्वार्ट० जर्न० मैथ० (आक्सफोड सिरीज), 1939, **10**, 25।

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका
968, **11**, 91-95

VIJNANA PARISHAD
ANUSANDHAN PATRIKA
1968, **11**, 91-95

गैगेनबॉयर श्रेणी की चिज़ारो परम संकलनीयता

धर्म प्रकाश गुप्त
मोतीलाल नेहरू रीजनल इंजीनियरिंग कालेज, इलाहाबाद

[प्राप्त—जनवरी 1, 1968]

सारांश

इस शोधपत्र का उद्देश्य गोला-पृष्ठ पर किसी फलन $f(\theta, \phi)$ की गैगेनबॉयर श्रेणी की प्रथम कोटि चिज़ारो परम संकलनीयता से सम्बन्धित एक सरल प्रमेय सिद्ध करना है।

Abstract

Absolute Cesàro summability of Gegenbauer series. *By* D. P. Gupta, Department of Mathematics, M. N. Regional Engineering College, Allahabad.

The object of the present note is to give a direct theorem on the absolute Cesàro summability of order one of the Fourier-Gegenbauer expansion of a function $f(\theta, \phi)$ on the surface of a sphere.

1. मान लो कि गोला-पृष्ठ S के परिसर $0 \leqslant \theta \leqslant \pi, 0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi$ पर एक फलन $f(\theta, \phi)$ दिया हुआ है। इस फलन से सम्बन्धित गैगेनबॉयर (अथवा परागोलीय) श्रेणी निम्नलिखित है :

$$(1{\cdot}1) \quad f(\theta,\phi) \sim \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda) \iint_s \frac{f(\theta',\phi') P_n^{(\lambda)}(\cos\omega) \sin\theta' d\theta' d\phi'}{[\sin^2\theta' \sin^2(\phi-\phi')]^{1/2-\lambda}}$$

$$\equiv \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} A_n, \; \lambda > 0,$$

जिसमें
$$\cos\omega = \cos\theta \cos\theta' + \sin\theta \sin\theta' \cos(\phi-\phi'),$$

और गैगेनबॉयर (अथवा परागोलीय) बहुपद $P_n^{(\lambda)}(\cos\omega)$ की परिभाषा निम्नांकित संबंध के द्वारा दी जाती है :

$$(1-2z\cos\omega+z^2)^{-\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P_n^{(\lambda)}(\cos\omega).$$

उपर्युक्त श्रेणी की धन कोटि अंक की साधारण चिज़ारो संकलनीयता पर कोगबेतलियाँज[1] तथा ऑब्रेश-काफ[2] का कार्य उल्लेखनीय है। उस सम्बन्ध में लेखक ने भी एक शोधपत्र[3] प्रकाशित किया है। लेखक ने श्रेणी की आबिल परम-संकलनीयता पर भी दो प्रमेय[4] दिये हैं। इस शोधपत्र में इसी श्रेणी की चिज़ारो परम-संकलनीयता से संबंधित एक सीधा सरल परिणाम दिया जा रहा है।

हमने मान लिया है कि फलन

$$f(\theta', \phi')\ [\sin^2\theta' \sin^2(\phi-\phi')]^{\lambda-1/2} \tag{1.2}$$

गोला-पृष्ठ S पर लेबेग की परिभाषा के अनुसार परम-समाकलनीय है। कोगबेतलियाँज ने[1] S पर $f(\theta, \phi)$ के एक व्यापकीकृत माध्यमान $f(\omega)$ की परिभाषा निम्नांकित ढंग से दी है :

$$f(\omega) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2}+\lambda)}{2\pi\,\Gamma(\lambda)\,(\sin\omega)^{2\lambda}} \int_{c_\omega} \frac{f(\theta',\phi')\,ds'}{[\sin^2\theta' \sin^2(\phi-\phi')]^{1/2-\lambda}},$$

जिसमें कि वक्ररेखी समाकल का मान उस लघुवृत्त पर ज्ञात किया जाता है जिसका केन्द्र (θ, ϕ) है और जिसकी वक्ररेखीय त्रिज्या ω है।

$\phi(\omega)$ के द्वारा हम फलन

$$(\sin\omega)^{2\lambda-1}\ \frac{\Gamma(\lambda)}{2\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2}+\lambda)}\ \{f(\omega)-f(0)\} \tag{1.4}$$

को दर्शायेंगे और निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध करेंगे :

प्रमेय 1 : यदि $0<\lambda\leqslant\frac{1}{2}$, $\mu>0$ और

$$\int_0^\pi \frac{|d\phi(\omega)|}{(\sin\omega)^\mu} < \infty, \tag{1.5}$$

तब परागोलीय-श्रेणी (1·1), $|c, 1|$—संकलनीय होगी।

यहाँ हम कोगबेतलियाँज द्वारा[5] सिद्ध किये हुए एक ऐसे परिणाम को उद्धृत कर रहे हैं जिसकी हमें आगे चल कर आवश्यकता पड़ेगी।

प्रमेयिका : यदि $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, $\lambda>0$, $n=0, 1, \ldots \infty$, तो

$$|P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)| \leqslant 2\ (\sin\theta)^{-\lambda} A_n^{(\lambda-1)}, \tag{1.6}$$

और यदि $\frac{\pi}{n+1} \leqslant\theta\leqslant\pi-\frac{\pi}{n+1}$, $\lambda > 0$, तो

$$(1\cdot7)\qquad P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)=\frac{2A_n^{(\lambda-1)}\cos[(n+\lambda)\theta-\frac{1}{2}\lambda\pi]}{(2\sin\theta)^{\lambda}}+$$

$$+\frac{k}{(n+1)^{2-\lambda}(\sin\theta)^{\lambda+1}},$$

जब कि
$$A_n^{(q)}=\binom{n+q}{q}\sim n^q,$$

और k एक अचर राशि है।

2. **प्रमेय की उपपत्ति** : श्रेणी (1·1) का mवाँ आंशिक योगफल

$$S_m=\frac{\Gamma(\lambda)}{2\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2}+\lambda)}\int_0^{\pi}f(\omega)\left[\frac{d}{dx}\left\{P_{m+1}^{(\lambda)}(x)+P_m^{(\lambda)}(x)\right\}\right]_{x=\cos\omega}$$

$$\times(\sin\omega)^{2\lambda}\,d\omega.$$

अतः

$$(2\cdot1)\qquad S_m-f(P)=\int_0^{\pi}\frac{\Gamma(\lambda)}{2\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}+\lambda)}\{f(\omega)-f(0)\}$$

$$\times\left[\frac{d}{dx}\left\{P_{m+1}^{(\lambda)}(x)+P_m^{(\lambda)}(x)\right\}\right]_{x=\cos\omega}(\sin\omega)^{2\lambda}\,d\omega$$

$$=\int_0^{\pi}\phi(\omega)\,\frac{d}{d\omega}\left\{P_{m+1}^{(\lambda)}(\cos\omega)+P_m^{(\lambda)}(\cos\omega)\right\}d\omega$$

$$=\left[\phi(\omega)\left\{P_{m+1}^{(\lambda)}(\cos\omega)+P_m^{(\lambda)}(\cos\omega)\right\}\right]_0^{\pi}$$

$$-\int_0^{\pi}\left\{P_{m+1}^{(\lambda)}(\cos\omega)+P_m^{(\lambda)}(\cos\omega)\right\}d\phi(\omega)$$

$$=\phi(\pi)\left[P_{m+1}^{(\lambda)}(-1)+P_m^{(\lambda)}(-1)\right]$$

$$-\int_0^{\pi}\left\{P_{m+1}^{(\lambda)}(\cos\omega)+P_m^{(\lambda)}(\cos\omega)\right\}d\phi(\omega)$$

$$(2\cdot2)\qquad =\text{मान लो कि } U_1-U_2,$$

यह स्पष्ट है कि

$$U_1=\phi(\pi)\Big[(-1)^{m+1}P_{m+1}^{(\lambda)}(1)+(-1)^m P_m^{(\lambda)}(1)\Big\}$$

$$=(-1)^m\phi(\pi)\left[\frac{\Gamma(m+2\lambda)}{\Gamma(m+1)\Gamma(2\lambda)}-\frac{\Gamma(m+1+2\lambda)}{\Gamma(m+2)\Gamma(2)\lambda}\right]$$

$$(2\cdot3)\qquad =(-1)^m\,\phi(\pi)\,\frac{\Gamma(m+2\lambda)}{\Gamma(m+2)\Gamma(2\lambda)}\,(1-2\lambda)\sim Am^{2\lambda-2}.$$

तथा

$$U_2=\int_0^{\pi}\left\{P_{m+1}^{(\lambda)}(\cos\omega)+P_m^{(\lambda)}(\cos\omega)\right\}d\phi(\omega)$$

$$(2.4)\qquad =\int_0^{\pi/m+1}+\int_{\pi/m+1}^{\pi-\pi/m+1}+\int_{\pi-(\pi/m+1)}^{\pi}$$

$$=\text{मान लो } I_1+I_2+I_3,$$

I_1 और I_3 में (1·6) का उपयोग करने पर तथा I_2 में (1·7) का उपयोग करके यह सिद्ध किया जा सकता है कि

$$(2.5)\qquad U_2=O(m^{2\lambda-1-\mu}).$$

अतः

$$(2\cdot6)\qquad |S_m-f(P)|=O(m^{2\lambda-1-\mu})+O(m^{2\lambda-2}),$$

जिसके फलस्वरूप यह स्पष्ट है कि

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|S_m-f(P)|}{m}=O(1)$$

क्योंकि $0<\lambda\leqslant\frac{1}{2}$.

समान उपपत्ति के द्वारा हम निम्नलिखित प्रमेय भी सिद्ध कर सकते हैं जिसमें λ प्राचल का परिसर $0<\lambda\leqslant\frac{1}{2}$ के स्थान पर $0<\lambda<1$ रखा जा सकता है।

प्रमेय 2: यदि $0<\lambda<1$, तथा

$$\int_0^{\pi}\frac{|d\phi(\omega)|}{(\sin\omega)^{\lambda}}<\infty,$$

तब श्रेणी (1.1), $|c, 1|$—संकलनीय होगी।

निर्देश

1. कोगबेतलियाँज, ई० । **जूर्नाल द माथेमाटिक**, 1924, **3**, 107-187 ।
2. आॅब्रेश्काफ, एन० । **राँद० देल सर्क० मेट० दी पालर्मो**, 1936, **59**, 266-287 ।
3. गुप्ता, डी० पी० । **प्रोसी० नेश० इंस्टी० साइं० इंडिया**, 1958, **24**, 269-278 ।
4. गुप्ता, डी० पी० । **एनाली डी मेट०**, 1962, **59**, 179-188 ।
5. कोगबेतलियाँज, ई० । **बुल० द ला सोसा० माथ० द फ्रांस**, 1923, **51**, 244-295 ।

विज्ञान परिषद् अनुसंधान पत्रिका
1968, **11**, 97-101

VIJNANA PARISHAD
ANUSANDHAN PATRIKA
1968, **11**, 97-101

हाइपरज्यामितीय फलनों का गुणनफल सम्बन्धी अनन्त समाकल

एस० एल० बोरा
गवर्नमेंट कालेज, चित्तौड़गढ़, राजस्थान

[प्राप्त—अगस्त 31, 1967]

सारांश

प्रस्तुत शोधपत्र का उद्देश्य हाइपरज्यामितीय फलनों के गुणनफल सम्बन्धी एक अनन्त समाकल का मान ज्ञात करना है। इसमें प्राप्त परिणाम की कतिपय विशिष्ट दशाओं का विभिन्न परिवर्तों में R-फलन के प्रतिबिम्ब प्राप्त करने का भी उल्लेख हुआ है।

Abstract

An infinite integral involving product of Hypergeometric functions. *By* S. L. Bora, Government College, Chittorgarh (Rajasthan).

The object of this paper is to evaluate an infinite integral involving product of hypergeometric functions. Some interesting particular cases of the result giving images of R-function in various transforms have also been mentioned.

1. हाल ही में अलसलम तथा कार्लिट्ज [1, pp 911] ने R-फलन को इस प्रकार पारिभाषित किया है :-

$$R(\lambda, \mu, \nu, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\lambda+n+1)_n \cdot x^n}{n!\Gamma(\mu+n+1)\Gamma(\nu+n+1)} \tag{1.1}$$

और यह सिद्ध किया कि जब $\lambda=\mu+\nu$ तो

$$x^{\mu+\nu} R(\mu+\nu, \mu, \nu, x^2) = J_\mu (2x)\, J_\nu (2x). \tag{1.2}$$

तथा आगे भी यदि $\lambda=2\mu;\ \nu=\mu-\frac{1}{2}$ तो

$$R(2\mu,\mu,\mu-\tfrac{1}{2}, x^2) = \pi^{-1/2}\, x^{-2\mu}\, J_{2\mu}(4x). \tag{1.3}$$

उन्होंने [1. pp 912] यह भी सिद्ध किया है कि

$$(1.4)\quad {}_pF_{q+1}\left[\begin{matrix}\alpha_1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \alpha_p\\ \mu+1, \nu+1, \beta_1, \ldots, \beta_{q-1}\end{matrix}; -4x^2y\right] \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+1)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (x)^{2n} \frac{(\lambda+2n)\Gamma(\lambda+n)}{n!}. F(\lambda+2n, \mu+n, \nu+n, x^2)$$

$$\times {}_{p+2}F_{q+1}\left[\begin{matrix}-n, \lambda+n, \alpha_1, \ldots, \alpha_p\\ (\lambda+1)/2, (\lambda+2)/2, \beta_1, \ldots, \beta_{q-1}\end{matrix}; y\right]$$

(1·4) में उपयुक्त प्राचलों के चयन द्वारा (1·3) के कारण यह निम्नांकित रूप धारण करेगा :

$$(1\cdot5)\quad x^{\nu}\, {}_pF_{q+1}\left[\begin{matrix}\alpha_1, \ldots\ldots\ldots\ldots, \alpha_p\\ (r+1)/2, (r+2)/2, \beta_1, \ldots, \beta_{q-1}\end{matrix}; -4x^2yz^2\right]$$

$$=(2z)^{-r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(r+2n)\Gamma(r+n)}{n!} J_{r+2n}(4zx).$$

$${}_{p+2}F_{q+1}\left[\begin{matrix}-n, r+\alpha_1, \ldots \alpha_p\\ (r+1)/2, (r+2)/2, \beta_1, \ldots, \beta_{q-1}\end{matrix}; y\right]$$

2. इस अनुभाग में हम ऊपर दिये गये फलों के आधार पर एक अनन्त समाकल का मान निकालेंगे। (1·5) में दोनों ओर $f(x)$ से गुणा करने पर तथा 0 से ∞ तक समाकलन करने पर एवं समाकलन का क्रम बदल देने पर

$$(2\cdot1)\quad \int_0^{\infty} x^r\, {}_pF_{q+1}\left[\begin{matrix}\alpha_1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\alpha_p\\ (r+1)/2, (r+2)/2, \beta_1, \ldots, \beta_{q-1}\end{matrix}; -4x^2yz^2\right]. f(x)dx.$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (2z)^{-r} \frac{(r+2n)\Gamma(r+n)}{n!} {}_{p+2}F_{q+1}\left[\begin{matrix}-n, r+n, \alpha_1, \ldots\ldots\alpha_p\\ (r+1)/2, (r+2)/2, \beta_1, \ldots, \beta_{q-1}\end{matrix}; y\right]$$

$$\int_0^{\infty} J_{r+2n}(4zx) f(x)dx$$

$R(r+\xi+1)>0$ जहाँ $f(x)=O(x^{\xi})$ यदि 'x' छोटा हो।

समाकलन तथा अवकलन के क्रम में परिवर्तन की वैधता निम्नांकित प्रतिबन्धों [2, p. 500] से पुष्ट होती है।

(i)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(r+2n)\,\Gamma(r+n)}{n!} \mathcal{J}_{r+2n}(4zx)\ {}_{p+2}F_{q+1}\left[\begin{matrix}-n, r+n, a_1, \dots\dots, a_p\\(r+1)/2, (r+2)/2, \beta_1, \dots, \beta_{q-1}\end{matrix}; y\right]$$

श्रेणी $0 \leqslant x \leqslant \beta$, में समान रूप से अभिसारी है जिसमें β काल्पनिक है।

(ii) $f(x)$ x के समस्त $x > x_0 > 0$ के लिए शतत फलन है।

(iii) बाईं ओर का समाकल पूर्ण रूप से अभिसारी है।

यह ऐसा है यदि $R(r+\xi+1)>0$ जहाँ $f(x)=O(x^{\xi})$ 'x' छोटा हो।

उदाहरण 1. यदि हम

$$f(x)=G_{pq}^{\alpha\beta}\left(v^2x^2\left|\begin{matrix}a_1, \dots, a_p\\b_1, \dots, b_q\end{matrix}\right.\right) \tag{3}$$

लें तो (2.1) का प्रयोग करते हुये तथा ज्ञात परिणाम की सहायता से दाहिनी ओर के समाकल का मान ज्ञात करने पर हमें

(2.2)
$$\int_0^{\infty} x^r\ {}_mF_{l+1}\left[\begin{matrix}a_1, \dots, a_m\\(r+1)/2, (r+2)/2, \beta_1, \dots, \beta_{l-1}\end{matrix}; -4x^2yz^2\right] G_{pq}^{\alpha\beta}\left(u^2x^2\left|\begin{matrix}a_1, \dots, a_p\\b_1, \dots, b_q\end{matrix}\right.\right) dx$$

$$=2^{-r-2}z^{-r-3/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(r+2n)\,\Gamma(r+n)}{n!}\ {}_{m+2}F_{l+1}\left[\begin{matrix}-n, r+n, a_1, \dots, a_m\\(r+1)/2, (r+2)/2, \beta_1, \dots, \beta_{l-1}\end{matrix}; y\right]$$

$$\times G_{p+2,\,q}^{\alpha,\,\beta+1}\left(\frac{u^2}{4z^2}\left|\begin{matrix}-(r+2n)/2, a_1, \dots, a_p, (r+2n)/2\\b_1, \dots\dots\dots, b_q\end{matrix}\right.\right)$$

$$p+q<2(\alpha+\beta),\ |\text{Arg}\,u^2|<(\alpha+\beta-\tfrac{1}{2}p-\tfrac{1}{2}q)\pi,\ Re(a_j+\tfrac{1}{2})<\tfrac{3}{4}$$

$$Re\,(b_i+r/2+\tfrac{1}{2})>0,\ i=1, \dots, \alpha;\ j=1, 2, \dots\beta.$$

प्राप्त होगा। यदि हम

$$m=l=4,\ a_1=\frac{r+1}{2},\ a_2=\frac{r+2}{2},\ a_3=\frac{\lambda+1}{2},\ a_4=\frac{\lambda+2}{2}$$

$$\beta_1=1+\lambda,\ \beta_2=1+\mu,\ \beta_3=1+\nu_1$$

लें तो (2.2) निम्नांकित रूप में परिणत हो जावेगा

$$(2.3) \qquad \int_0^\infty x^r \,.\, R(\lambda, \mu, \nu, x^2 yz^2) \,.\, G_{pq}^{\alpha\beta}\left(u^2x^2 \middle| \begin{matrix} a_1, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_q \end{matrix} \right) dx$$

$$= \frac{2^{-r-2}\, z^{-3/2}}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(r+2n)\,\Gamma(r+n)}{n!}\, {}_4F_3\left[\begin{matrix} -n, r+n, (\lambda+1)/2, (\lambda+2)/2 \\ 1+\lambda, 1+\mu, 1+\nu \end{matrix} ; y \right.$$

$$\times G_{p+2,\, q}^{\alpha,\, \beta+1}\left(\frac{u^2}{4z^2} \middle| \begin{matrix} -(r+2n)/2, a_1, \ldots, a_p, (r+2n)/2 \\ b_1, \ldots, b_q \end{matrix} \right)$$

3. विशिष्ट दशा

आगे (2.3) परिणाम की कई रोचक दशायें दी जा रही हैं। इनसे हमें अलसलम तथा कार्लिट्ज के R फलन के विभिन्न समाकल परिवर्त प्राप्त होते हैं।

(i) मानते हुये $\alpha=q=2, \beta=p=0, b_1=\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}m, b_2=\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}m$;

$$(3.1) \qquad \int_0^\infty x^{r+k}\, K_m\,(ux)\; R(\lambda,\mu,\nu,\, x^2yz^2)\; dx$$

$$= \frac{2^{k-r-3}\, u^{-k} z^{-3/2}}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(r+2n)\Gamma(r+n)}{\text{L}n}\, {}_4\text{F}_3\left[\begin{matrix} -n, n+r, \lambda+1/2, \lambda+2/2 \\ 1+\lambda, 1+\mu, 1+\nu \end{matrix} ; y \right]$$

$$\times \text{G}_{22}^{21}\left(\frac{u^2}{4z^2} \middle| \begin{matrix} -(r+2n)/2, (r+2n)/2 \\ \frac{1}{2}k+\frac{1}{2}m, \frac{1}{2}k-\frac{1}{2}m \end{matrix} \right)$$

$|\text{Arg } u^2/4| < \pi,\; R_e\,(k \pm m+r+1) > 0.$

(ii) $\alpha=g=2,\; \beta=0,\; p=1,\; a_1=l-k+1,$

$b_1=m+l+\frac{1}{2};\; b_2=m-l+\frac{1}{2}$; मानते हुये

$$(3.2) \qquad \int_0^\infty x^{l+r-1/2}\, e^{-1/2\,ux}\, W_{k,m}\,(ux)\; R(\lambda,\mu,\nu;\; xyz^2)\; dx$$

$$= \frac{2^{-r-2}\, u^{-l}\, z^{-3/2}}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(r+2n)\,\Gamma(r+n)}{\text{L}n}\, {}_4\text{F}_3\left[\begin{matrix} -n, n+r, (\lambda+1)/2, (\lambda+2)/2 \\ 1+\lambda, 1+\mu, 1+\nu \end{matrix} ; y \right]$$

$$\times G_{32}^{21}\left(\frac{u}{4z^2} \middle| \begin{matrix} -(r+2n)/2,\; l-k+1,\; (r+2n)/2 \\ l+m+\frac{1}{2},\; l-m+\frac{1}{2} \end{matrix} \right)$$

$|\text{Arg}\, u| < \pi/2,\ R_e\,(l \pm m + r/2 + 1) > 0,\ R_e\,(l - k + \tfrac{3}{4}) < 0.$

(iii) $\alpha = 1,\ \beta = p = q = 2,\ b_1 = 0$ मानते हुये

$$(3.3)\quad \int_0^\infty x^r\, {}_2F_1\,(1-a_1, 1-a_2;\ 1-\beta_2;\ -u^2 x^2)\, R(\lambda, \mu, \nu;\ x^2 y z^2)\, dx$$

$$= \frac{2^{-r-2}\, z^{-3/2}}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+1)} \frac{\Gamma(1-\beta_2)}{\Gamma(1-a_1)\Gamma(1-a_2)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(r+2n)\,\Gamma(r+n)}{n!}$$

$$\times {}_4F_3\left[\begin{matrix} -n,\ n+r,\ (\lambda+1)/2,\ (\lambda+2)/2 \\ 1+\lambda,\ 1+\mu,\ 1+\nu \end{matrix};\ y\right]$$

$$\times G^{31}_{42}\left(\frac{u^2}{2^4 z^2}\middle|\begin{matrix} -(r+2n)/2,\ a_1,\ a_2,\ (r+2n)/2 \\ O,\ \beta_2 \end{matrix}\right)$$

$R_e\,(r+1) > 0,\ |\,\text{Arg}\, u^2/4\,| < \pi/2.$

कृतज्ञता-ज्ञापन

मैं जोधपुर विश्वविद्यालय के डा० आर० के० सक्सेना का अत्यन्त आभारी हूँ जिन्होंने मेरा पथ-प्रदर्शन किया।

निर्देश

1. अलसलम, डब्लू० ए० तथा कार्लिट्ज, एल०। **जर्न० मैथ० मेकैनिक्स**, 1963, **12** (6), 911-934.

2. ब्रामविच, टी० जे० आई० ए०। An Introduction to the theory of infinte series, **मैकमिलन, लंदन**, 1931।

3. एर्डेल्यी, ए० तथा अन्य। Tables of Integral transforms. **भाग II, मैकग्राहिल, न्यूयार्क** 1954.

विज्ञान परिषद् अनुसंधान पत्रिका
1968, **11**, 103-107

VIJNANA PARISHAD
ANUSANDHAN PATRIKA
1968, **11**, 103-107

बेसेल, व्हिटेकर तथा सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय फलनों के गुणनफल सम्बन्धी समाकल

आर० के० सक्सेना तथा आर० सी० व्यास
गणित विभाग, जोधपुर विश्वविद्यालय, जोधपुर

[प्राप्त—अगस्त 25, 1967]

सारांश

वे चार समाकल, जिनमें बेसेल फलनों, व्हिटेकर फलनों तथा सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय फलनों के गुणनफल सन्निहित हैं, काम्फे द फेरी द्वारा दिये गये दो चरों वाले सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय फलनों के रूप में ज्ञात किये जावेंगे।

Abstract

Integrals involving products of Bessel, Whittaker and generalized hypergeometric functions. *By* R. K. Saxena and R. C. Vyas, Department of Mathematics, University of Jodhpur, Jodhpur.

Four integrals involving products of Bessel functions, Whittaker functions and generalized hypergeometric functions will be evaluated in terms of the generalized hypergeometric functions of two variables given by Kampé de Fériet.

1. हम सार्वीकृत ज्यामितीय फलन ${}_pF_q(z)$ के लिए संक्षिप्त संकेतन विधि अपनाते हुये उसे लिखेंगे कि

$$ {}_pF_q(z) = {}_pF_q\left(\begin{matrix} a_i \\ b_j \end{matrix}\middle| z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((a))_n}{((b))_n} \frac{z^n}{n!}, $$

$$ {}_PF_Q(z) = {}_PF_Q\left(\begin{matrix} A_I \\ B_J \end{matrix}\middle| z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((A))_n}{((B))_n} \frac{z^n}{n!}, $$

तथा

$$ {}_pF_q\left(\begin{matrix} a_i \pm b_i \\ c_j \end{matrix}\middle| z\right) = {}_pF_q\left(\begin{matrix} a_i + b_i,\ a_i - b_i \\ c_j \end{matrix}\middle| z\right), $$

जहाँ i, 1 से p तक, I, 1 से p तक तथा इसी प्रकार आगे बढ़ता है। इस प्रकार $((a))_n$ की व्याख्या $\pi(a_i)_n$ के रूप में करनी होगी। इसी प्रकार की व्याख्या $((A))_n$ आदि के लिये भी लागू होगी।

$$(a)_n=\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}=a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1);\ (a)_0=1.$$

इस शोधपत्र का उद्देश्य चार समाकलों का मान निकालना है जिनमें काम्पे द फेरी [(1), p. 150] के द्वारा प्राप्त दो चरों वाले सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय फलनों के रूप में बेसेल फलन तथा व्हिटेकर फलन के गुणनफल रहते हैं। इस प्रकार प्राप्त (1) तथा (2) परिणाम वास्तव में पहले ही भोंसले [(2), p. 188)] तथा सिनहा [(6)] द्वारा दिये गये परिणामों के विस्तार हैं।

2. यहाँ पर निम्नांकित परिणामों की प्राप्ति की जावेगी

$$\int_0^1 x^{2\sigma+1}(1-x^2)^\beta P_n^{(\alpha,\beta)}(1-2x^2)\,{}_pF_q\left(\begin{matrix}a_i\\b_j\end{matrix}\middle|ax^2\right){}_PF_Q\left(\begin{matrix}A_I\\B_J\end{matrix}\middle|bx^2\right)dx$$

$$=\frac{(-1)^n\Gamma(\sigma+1)\Gamma(\sigma-\alpha+1)\Gamma(\beta+n+1)}{n!2\Gamma(\beta+\sigma+n+2)\Gamma(\sigma-\alpha-n+1)}$$

$$\times F\left[\begin{matrix}\sigma+1,\ \sigma-\alpha+1:a_i;\ A_I;\\ \beta+\sigma+n+2,\ \sigma-\alpha-n+1:b_j;\ B_J\end{matrix}\ a^2,\ b^2\right], \tag{1}$$

जहाँ $R(\sigma)>-1,\ R(\beta)>-1,\ p\leqslant q+1,\ P\leqslant Q+1$ और

$P_n^{(\alpha,\beta)}(z)$ जैकोबी के बहुपदियों को सूचित करता है। यहाँ पर F दो चरों वाले हाइपरज्यामितीय फलन को व्यक्त करता है जिसे काम्पे द फेरी [(1), p. 150] ने दिया और वर्तमान संकलन विधि बर्चनाल तथा चाँडी [(3), p. 112] के कारण हैं।

$$\int_0^\infty x^{\sigma-1}K_\mu(ax)K_\nu(ax)\,{}_pF_q\left(\begin{matrix}a_i\\b_j\end{matrix}\middle|bx^2\right){}_PF_Q\left(\begin{matrix}A_I\\B_J\end{matrix}\middle|cx^2\right)dx$$

$$=\frac{2^{\sigma-3}a^{-\alpha}\Gamma(\frac{1}{2}\sigma\pm\frac{1}{2}\mu\pm\frac{1}{2}\nu)}{\Gamma(\sigma)}$$

$$\times F\left[\begin{matrix}\frac{1}{2}\sigma\pm\frac{1}{2}\mu\pm\frac{1}{2}\nu:a_i;\ A_I;\\ \frac{1}{2}\sigma,\ \frac{1}{2}\sigma+\frac{1}{2}:b_j;\ B_J;\end{matrix}\ b/a^2,\ c/a^2\right], \tag{2}$$

जहाँ $R(\sigma\pm\mu\pm\nu)>0,\ R(a)>0,\ p\leqslant q-1,\ P\leqslant Q-1.$

$$\int_0^{\pi/2} (\cos t)^{\alpha} \cos (\beta t)\, {}_pF_q\left(\begin{matrix} a_i \\ b_j \end{matrix}\middle| a\cos^2 t\right) {}_PF_Q\left(\begin{matrix} A_I \\ B_J \end{matrix}\middle| b\cos^2 t\right) dt$$

$$= \frac{\pi \Gamma(1+a)}{2^{\alpha+1}\Gamma\{1+(\alpha+\beta)/2\}} F\left[\begin{matrix} (1+\alpha)/2,\ (1+\alpha/2): a_i; A_I; \\ 1+(\alpha+\beta)/2: b_j; B_J; \end{matrix}\ a, b\right], \quad (3)$$

जहाँ $R(\alpha) > -1, p \leqslant q, P \leqslant Q.$

$$\int_0^{\infty} x^{\rho-1}\, W_{k,\mu}(x)\, W_{-k,\mu}(x)\, {}_pF_q\left(\begin{matrix} a_i \\ b_j \end{matrix}\middle| ax^2\right) {}_PF_Q\left(\begin{matrix} A_I \\ B_J \end{matrix}\middle| bx^2\right) dx$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{\rho+1}{2} \pm \mu\right) \Gamma\left(\frac{1+\rho}{2}\right) \Gamma(1+\frac{1}{2}\rho)}{2\Gamma(1+\frac{1}{2}\rho \pm K)}$$

$$\times F\left[\begin{matrix} (\rho+1)/2 \pm \mu,\ (\rho+1)/2,\ 1+\frac{1}{2}\rho: a_i; A_I; \\ 1+\frac{1}{2}\rho \pm K: b_j; B_J; \end{matrix}\ 4a, 4b\right], \quad (4)$$

जहाँ $R(\rho \pm 2\mu) > -1, p \leqslant q-1, P \leqslant Q-1.$

उपपत्ति में निम्नांकित परिणामों की आवश्यकता पड़ेगी :

$$\int_0^1 x^{2\rho+1} (1-x^2)^{\beta}\, P_n^{(\alpha,\beta)}(1-2x^2)\, {}_pF_q\left(\begin{matrix} a_i \\ b_j \end{matrix}\middle| ax^2\right) dx$$

$$= \frac{(-1)^n \Gamma(\sigma+1)\, \Gamma(\sigma-\alpha+1)\, \Gamma(\beta+n+1)}{2\{n!\}\Gamma(\beta+\sigma+n+2)\Gamma(\sigma-\alpha-n+1)}$$

$$\times {}_{p+2}F_{q+2}\left(\begin{matrix} a_i,\ \sigma+1,\ \sigma-\alpha+1 \\ b_j,\ \beta+\sigma+n+2,\ \sigma-\alpha-n+1 \end{matrix}\middle| a\right), \quad (5)$$

जहाँ $R(\sigma) > -1,\ R(\beta) > -1,\ p \leqslant q+1.$

$$\int_0^{\infty} x^{\sigma-1} K_{\mu}(ax)\, K_{\nu}(ax)\, {}_pF_q\left(\begin{matrix} a_i \\ b_j \end{matrix}\middle| bx^2\right) dx$$

$$= \frac{2^{\sigma-3} a^{-\sigma}\, \Gamma(\frac{1}{2}\sigma \pm \frac{1}{2}\mu \pm \frac{1}{2}\nu)}{\Gamma(\sigma)}$$

$$\times {}_{p+4}F_{q+2}\left(\begin{matrix} \frac{1}{2}\sigma \pm \frac{1}{2}\mu \pm \frac{1}{2}\nu,\ a_i \\ \frac{1}{2}\sigma,\ \frac{1}{2}\sigma+\frac{1}{2},\ b_j \end{matrix}\middle| b/a^2\right), \quad (6)$$

जहाँ $R(\sigma\pm\mu\pm\nu)>0,\ R(a)>0,\ p\leqslant q-1.$

$$\int_0^{\pi/2}(\cos t)^{\alpha}\cos\beta t\ {}_pF_q\left(\begin{matrix}a_i\\ b_j\end{matrix}\middle| a\cos^2 t\right)dt$$

$$=\frac{\pi}{2^{\alpha+1}}\ \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}\ {}_{p+2}F_{q+2}\left(\begin{matrix}(1+\alpha)/2,\ 1+\frac{1}{2}\alpha,\ a_i\\ 1+(\alpha+\beta)/2,\qquad b_j\end{matrix}\middle| a\right),$$

जहाँ $R(\alpha)>0,\ p\leqslant q+1.$ (7)

$$\int_0^{\infty}x^{\rho-1}W_{k,\mu}(x)\,W_{k,-\mu}(x)\ {}_pF_q\left(\begin{matrix}a_i\\ b_j\end{matrix}\middle| ax^2\right)dx$$

$$=\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\rho)\Gamma(1+\frac{1}{2}\rho)\Gamma\{(\rho+1)/2\pm\mu\}}{2\Gamma(1+\frac{1}{2}\rho\pm K)}$$

$$\times {}_{p+4}F_{q+2}\left(\begin{matrix}(\rho+1)/2\pm\mu,\ (\rho+1)/2,\ 1+\rho/2,\ a_i\\ 1+\rho/2\pm K,\ b_j\end{matrix}\middle| 4a\right), \qquad (8)$$

जहाँ $W_{k,\mu}(z)$ पहले ही की भाँति व्हिटेकर फलन

$$R(\rho\pm2\mu)>-1,\ p\leqslant q-1,$$

को सूचित करता है ।

(5) तथा (6) फल क्रमशः भोंसले [(2), p. 188] तथा सिनहा [(6)] द्वारा दिये जा चुके हैं। (7) तथा (8) को ${}_pF_q(z)$ का विस्तार करके तथा ज्ञात परिणामों के पद प्रति पद समाकलन द्वारा [(4), p. 12, eq. 30 तथा [(5), p. 409, eq. 41] क्रमशः सिद्ध किया जा सकता है।

(1) की उपपत्ति. यदि हम (1) में ${}_pF_Q(bx^2)$ के मान को इसके समतुल्य घात श्रेणी में प्रति-स्थापित करें, और फिर समाकलन तथा अवकलन के क्रम को बदल कर सूत्र (5) का उपयोग करें तो हमें अभीष्ट परिणाम प्राप्त होगा ।

3. विशिष्ट दशायें

इसी प्रकार अन्य परिणामों को प्राप्त किया जा सकता है।

(i) जब (1) में a शून्य की ओर अभिमुख होता है तो यह भोंसले [(2),p. 188] द्वारा दिये गये एक पूर्व परिणाम में परिणत हो जाता है।

(ii) किन्तु यदि (2) में $b\to0$ तो इससे सिनहा [(6)] द्वारा प्राप्त परिणाम निकलेगा ।

निर्देश

1. ऐपेल, पी० तथा काम्पे द फेरी, जे० । Fonctions hypergeometriques et hyperspheriques: Polynomes d' Hermite (गोथियर विलार्स, पेरिस, 1926.

2. भोंसले, बी० आर० । जर्न० इंडियन मैथ० सोसा०, 1962, 26, 187-190.

3. बर्चनाल, जे० एल० तथा चाँडी, टी० डब्लू० । क्वा० जर्न० मैथ० (आक्सफोर्ड), 1941, 12, 112-118

4. एर्डेल्यी, ए० तथा अन्य । Higher transcendental functions. भाग 1 मैकग्राहिल, न्यूयार्क, 1953.

5. वही । Tables of integral transforms, भाग 2, मैकग्राहिल, न्यूयार्क, 1954.

6. सिनहा, एस० । बुले० कलकत्ता मैथ० सोसा०, 1943, 35, 37-42

विज्ञान परिषद् अनुसंधान पत्रिका
1968, **11**, 109-120

VIJNANA PARISHAD
ANUSANDHAN PATRIKA
1968, **11**, 109-120

n चरों वाला हैंकेल परिवर्त

जी० के० गोयल
गणित विभाग, राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर

[प्राप्त—अगस्त 5, 1967]

सारांश

इस शोधपत्र का उद्देश्य n चरों वाले हैंकेल परिवर्त का सिद्धान्त विकसित करना है। इसके अनुभाग (3) में दो चरों वाले हैंकेल परिवर्त के कुछ प्रमेयों की स्थापना की गई है और अनुभाग (4) में कुछ विशिष्ट फलनों का अंकन है।

Abstract

On Hankel transform of n variables. *By* G. K. Goyal, Department of Mathematics, Rajasthan University, Jaipur.

The object of this paper is to develop the theory of Hankel transform of n variables. In sec. (3) some theorems are established and in sec. (4) images of some special functions are obtained in case of Hankel transform of two variables.

1. इस शोधपत्र में n चरों वाले हैंकेल परिवर्त के चार प्रमेय सिद्ध किये गये हैं और उनको व्यवहृत करके कुछ रोचक समाकल प्राप्त किये गये हैं।

μ कोटि का एक चर वाला हैंकेल परिवर्त निम्नांकित प्रकार से पारिभाषित किया जाता है :—

$$\phi(p)=p\int_0^\infty (pt)^{1/2}\, J_\mu(pt) f(t)\, dt; \quad p>0 \tag{1.1}$$

अब हम n चरों वाले हैंकेल परिवर्त को निम्न समाकल समीकरण द्वारा पारिभाषित करेंगे :—

$$\phi(p_r, n)=\prod_{r=1}^{n}(p_r)(N)\int_0^\infty \prod_{r=1}^{n}(p_r\, t_r)^{1/2}.\prod_{r=1}^{n} J_{\mu_r}(p_r\, t_r).f(t_r, n)\prod_{r=1}^{n}(dt_r) \tag{1.2}$$

जहाँ $(p_r, n)>0$.

जिन्हें संकेत रूप में क्रमश:

$$\phi(p)\underset{\mu}{\overset{\mathcal{J}}{=}} f(t) \text{ तथा } \phi(p_r, n) \underset{(\mu_r, n)}{\overset{\mathcal{J}}{=\!=}} f(t_r n)$$

द्वारा प्रदर्शित किया गया है।

2. निम्नांकित संकेतों का प्रयोग शोधपत्र में किया गया है :

$$(p_r, n) == (p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n)$$

$$\prod_{r=1}^{n} (p_r) == p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \ldots p_n.$$

$$(\mathcal{N}) \int_0^\infty \prod_{r=1}^{n} dt_r == \int_0^\infty \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty dt_1\, dt_2\, dt_3 \ldots dt_n.$$

3. प्रमेय-1. यदि $\phi_1(p_r, n) \underset{(\mu_r, n)}{\overset{\mathcal{J}}{=\!=}} f_1(t_r, n)$

तथा $$\phi_2(p_r, n) \underset{(\mu_r, n)}{\overset{\mathcal{J}}{=\!=}} f_2(t_r, n)$$

तो

$$(3.1) \quad (\mathcal{N}) \int_0^\infty \phi_1(u_r, n) \cdot f_2(u_r, n) \prod_{r=1}^{n} \frac{du_r}{u_r} = (\mathcal{N}) \int_0^\infty \phi_2(v_r, n) \cdot f_1(v_r, n) \prod_{r=1}^{n} \frac{dv_r}{v_r}$$

यदि आये हुये समाकल पूर्णतः अभिसारी हों।

उपपत्ति : हमें ज्ञात है कि

$$(\mathcal{N}) \int_0^\infty \phi_1(u_r, n)\, f_2(u_r, n) \prod_{r=1}^{n} \frac{du_r}{u_r}$$

$$= (\mathcal{N}) \int_0^\infty \left\{ \prod_{r=1}^{n} (u_r) (\mathcal{N}) \int_0^\infty \prod_{r=1}^{n} (u_r v_r)^{1/2} \cdot \prod_{r=1}^{n} \mathcal{J}_{\mu_r}(u_r v_r) \right.$$

$$\left. \times f_1(v_r, n) \cdot \prod_{r=1}^{n} (dv_r) \right\} f_2(u_r, n) \prod_{r=1}^{n} \left(\frac{du_r}{u_r}\right)$$

$$=(\mathcal{N})\int_0^\infty f_1(v_r, n)\Big\{\prod_{r=1}^{n}(v_r)(\mathcal{N})\int_0^\infty \prod_{r=1}^{n}(u_r v_r)^{1/2}$$

$$\times\prod_{r=1}^{n}\mathcal{J}_{\mu_r}(u_r v_r)\cdot f_2(u_r, n)\cdot\prod_{r=1}^{n}(du_r)\Big\}\prod_{r=1}^{n}\left(\frac{dv_r}{v_r}\right)$$

$$=(\mathcal{N})\int_0^\infty f_2(v_r, n)\cdot\phi_2(v_r, n)\cdot\prod_{r=1}^{n}\left(\frac{dv_r}{v_r}\right).$$

यदि उपर्युक्त कोष्टकों के गुणित समाकल पूर्णतः तथा समान रूप से अभिसारी हों तो समाकलन के क्रम को बदला जा सकता है। इसके लिये
$R(\eta\pm\mu+\frac{1}{2})>0$ जहाँ $f_1(v_r, n)=0(V^\eta)$, यदि V छोटा हो तथा $V=(V_r, n)$, $\eta=(\eta_r, n)$ तथा $R(\alpha\pm\mu+\frac{1}{2})>0$ जहाँ $f_2(u_r, n)=0\ (U^\alpha)$, यदि U छोटा हो तथा $U=(U_r, n)$, $\alpha=(\alpha_r, n)$.

प्रमेय-2. यदि

(3.2) $$\phi(p_r, n)\,\overset{\mathcal{J}}{\underset{(\mu_r, n)}{=\!=}}\,f(t_r, n)$$

तो $$\phi\left(\frac{P_r}{a_r};\ n\right)\overset{\mathcal{J}}{\underset{(\mu_r, n)}{=\!=}}\,f(a_r t_r, n)$$

यदि समाकल पूर्णरूपेण अभिसारी हो।

प्रमेय-3. यदि

(3.3) $$\phi(p_r, n)\,\overset{\mathcal{J}}{\underset{(\mu_r, n)}{=\!=}}\,f(t_r, n)$$ तथा

(3.4) $$\prod_{r=1}^{n}(x_r)^{1/2}\cdot\prod_{r=1}^{n}\{h_r(p_r)\}^{3/2}\cdot\prod_{r=1}^{n}\mathcal{J}_{\mu_r}\{x_r h_r(p_r)\}\cdot\psi(p_r, n)\,\overset{\mathcal{J}}{\underset{(\nu_r, n)}{=\!=}}$$
$$\times g(x_r, n;\ t_r, n)$$

तो

(3.5) $$\psi(p_r, n)\phi\Big\{\prod_{r=1}^{n}h_r(p_r)\Big\}\overset{\mathcal{J}}{\underset{(\nu_r, n)}{=\!=}}(\mathcal{N})\int_0^\infty f(x_r, n)g(x_r, n;\ t_r, n)\prod_{r=1}^{n}(dx)_r$$

यदि $|f(t_r, n)|$ तथा $|g(x_r, n; t_r, n)|$ के हैंकेल परिवर्त विद्यमान हों, $h_r(p_r)>0$ $(r=1, 2...n)$; $\psi(p_r, n), h_r(p_r)$ P_r के शतत फलन हैं जो x_r से स्वतन्त्र हैं तथा (3·5) का समाकल पूर्णरूपेण अभिसारी है।

उपपत्ति : (3.3) से

$$\psi(p_r, n)\phi\left\{\prod_{r=1}^{n} h_r(p_r)\right\}=\psi(p_r, n) \cdot \prod_{r=1}^{n} h_r(p_r) \cdot (\mathcal{N})\int_0^\infty \prod_{r=1}^{n} \{x_r h_r(p_r)\}^{1/2}.$$

$$\times \prod_{r=1}^{n} \mathcal{J}_{\mu_r}\{x_r h_r(p_r)\} \cdot \prod_{r=1}^{n} (dx_r).$$

(3.4) की सहायता से उपर्युक्त समाकल के दाहिनी ओर व्यंजक की व्याख्या करने पर हमें (3.5) की प्राप्ति होती है।

प्रमेय-4. यदि
$$f(t_r, n)=\prod_{r=1}^{n} f(t_r)$$

तथा
$$\phi(pr)\underset{\mu_r}{\overset{\mathcal{J}}{=}} f(t_r), r=1, 2, 3, \ldots\ldots, n.$$

तो

$$\phi(p_r, n)=\prod_{r=1}^{n}\phi(pr)\underset{(\mu_r, n)}{\overset{\mathcal{J}}{=}} f(t_r, n) \quad (3·6)$$

जहाँ पर $|f(t_r)|, f(t_r, n)$ के हैंकेल परिवर्त विद्यमान हैं।

अब हम प्रमेय-3 के उपप्रमेय की विवेचना करेंगे।

यदि
$$f(t_r, n)=\prod_{r=1}^{n} f(t_r) \text{ तथा } \phi(p_r)\underset{\mu_r}{\overset{\mathcal{J}}{=}} f(t_r), (r=1, 2, 3, \ldots n)$$

तथा
$$\left[x_r^{1/2}\{h_r(p_r)\}^{3/2}\psi(p_r)\underset{\nu_r}{\overset{\mathcal{J}}{=}} g(x_r, n), (r=1, 2, 3, \ldots n) \cdot \mathcal{J}_{\mu_r}\{x_r h_r(p_r)\}\right]$$

तो

$$\prod_{r=1}^{n} \psi(p_r) \cdot \prod_{r=1}^{n} \phi\{h_r(p_r)\} \underset{(\nu_r, n)}{\overset{\mathcal{J}}{=}} (\mathcal{N})\int_0^\infty \prod_{r=1}^{n} f(x_r) \cdot \prod_{r=1}^{n} g(x, n) \cdot \prod_{r=1}^{n} dx_r \quad (3·7)$$

यदि प्रयुक्त हैंकेल परिवर्त अभिसारी हों।

यदि $n=1$, तो हम इसके सम्प्रयोग के एक अत्यन्त महत्वपूर्ण फल को प्राप्त करते हैं। यह है:-

यदि $$\phi(p) \underset{\mu}{\overset{\mathcal{J}}{=}} f(t) \text{ तथा } x^{1/2}\{h(p)\}^{3/2} \cdot \mathcal{J}_\mu\{xh(p)\} \cdot \psi(p) \underset{\nu}{\overset{\mathcal{J}}{=}} g(x, t)$$

तो

$$\psi(p) \cdot \phi\{h(p)\} \underset{\nu}{\overset{\mathcal{J}}{=}} \int_0^\infty f(x) \cdot g(x, t)\, dx \tag{3·8}$$

यदि $|f(t)|$ तथा $|g(x, t)$के हैंकेल परिवर्त विद्यमान हों, $R\{h(p)\}>0$; $\psi(p)$, $h(p)$ ये (p) के शतत फलन हैं और x पर आधारित नहीं है तथा (3·8) का समाकल पूर्णरूपेण अभिसारी है।

(3·8) की विशिष्ट दशायें:-

(i) यदि $h(p)=p$, $\psi(p)=p^{-2\lambda-1}$, $\mu=\nu$

तो [2, p. 47] द्वारा हम (3·8) से

$$p^{-2\lambda-1}\phi(p) \underset{\nu}{\overset{\mathcal{J}}{=}} \frac{t^{\nu+1/2}\Gamma(\nu-\lambda+\frac{1}{2})}{2^{2\lambda}\Gamma(\nu+1)\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})} \int_0^\infty \frac{x^\nu}{(x+t)^{2\nu-2\lambda+1}}$$
$$ {}_2F_1\left\{\begin{matrix}\nu-\lambda+\frac{1}{2}, \nu+\frac{1}{2}; \\ 2\nu+\frac{1}{2}\end{matrix} \frac{4xt}{(x+t)^2}\right\} \cdot f(x)dx, \tag{3·9}$$

प्राप्त करेंगे जहाँ $p>0$, $R(\nu+\frac{1}{2})>R(\lambda)>-\frac{1}{2}$.

(ii) माना कि $h(p)=p$, $\psi(p)=p^{-\lambda-1}$

तो [2, p. 48], के द्वारा हम

$$p^{-\lambda-1}\phi(p) \underset{\nu}{\overset{\mathcal{J}}{=}} \frac{t^{\nu+1/2}\Gamma\frac{1}{2}(\mu+\nu-\lambda+1)}{2^{\lambda}\Gamma(\nu+1)\Gamma\frac{1}{2}(\lambda+\mu-\nu+1)} \int_0^a x^{\lambda-\nu-1}$$
$$\times {}_2F_1\left\{\begin{matrix}(\mu+\nu-\lambda+1)/2, (\nu-\lambda-\mu+1)/2 \\ \nu+1\end{matrix} ; \frac{t^2}{x^2}\right\} f(x)\, dx, \quad 0<x<a \tag{3·10}$$

प्राप्त करेंगे। अथवा

$$p^{-\lambda-1}\phi(p) \underset{\nu}{\overset{\mathcal{J}}{=}} \frac{t^{\lambda-\mu-1/2}\Gamma\frac{1}{2}(\mu+\nu-\lambda+1)}{2^{\lambda}\Gamma(\mu+1)\Gamma\frac{1}{2}(\lambda+\nu-\mu+1)} \int_a^\infty x^\mu$$
$${}_2F_1\left\{\begin{matrix}(\mu+\nu-\lambda+1)/2, (\mu-\lambda-\nu+1)/2 \\ \mu+1\end{matrix} ; \frac{x^2}{t^2}\right\} f(x)dx, \quad a<x<\infty \tag{3.11}$$

जहाँ $$p>0, R(\mu+\nu+1)>R(\lambda)>-1$$

(iii) $h(p)=p$, $(p)=p^{-1}e^{-ap}$, $\mu=\nu$ रखने पर [2, p.50] के द्वारा हमें

$$(3.12) \qquad \pi p^{-1}e^{-ap}\phi(p)\underset{\nu}{\overset{\mathcal{J}}{=}}\int_0^\infty x^{-1/2}Q_{\nu-1/2}\left(\frac{a^2+x^2+t^2}{2xt}\right)f(x)\,dx,$$

प्राप्त होता है जहाँ $R(a)>1$, $(x)>0$, $R(\nu+\frac{1}{2})>0$.

प्रमेय 3 के उपप्रमेय की भाँति ही हम कुछ अन्य उपमेय स्थापित कर सकते हैं। ये हैं:—

प्रमेयः यदि $\phi(x)\underset{\mu}{\overset{k}{=}}f(t)$

तथा $\sqrt{\left(\frac{2\lambda}{\pi}\right)}\{h(p)\}^{3/2}K_\mu\{xh(p)\}\psi(p)\underset{\nu}{\overset{\mathcal{J}}{=}}g(x,t)$

तो

$$(3.13) \quad \psi(p)\phi\{h(p)\}\underset{\nu}{\overset{\mathcal{J}}{=}}\int_0^\infty g(x,t)\,f(x)dx,$$

यदि $|g(x,t)|$ के हैंकेल परिवर्त तथा $|f(t)|$ के माइजर परिवर्त विद्यमान हों। $R\{h(p)\}>0$; $\psi(p)$, $h(p)$ ये p के शतत फलन हैं जो x पर आधारित नहीं हैं तथा (3.13) का समाकल पूर्णरूपेण अभिसारी है।

विशिष्ट दशा: माना कि $h(p)=p, \psi(p)=p^{-\lambda-1}$

तो [2, p. 63] के द्वारा

$$(3.14) \quad \sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)}\left(\frac{2}{p}\right)^{\lambda+1}\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma\frac{1}{2}(\nu-\lambda+\mu+1)\,\Gamma\frac{1}{2}(\nu-\lambda-\mu+1)}\phi(p)\underset{\nu}{\overset{\mathcal{J}}{=}}t^{\nu+3/2}$$

$$\int_0^\infty x^{\lambda-\nu-3/2}{}_2F_1\left\{\begin{matrix}(\nu-\lambda+\mu+1)/2,\ (\nu-\lambda-\mu+1)/2\\ \nu+1\end{matrix};-\frac{t^2}{x^2}\right\}f(x)\,dx,$$

जहाँ $p>0$, $R(\nu-\lambda+1)>|R(\mu)|$.

प्रमेयः यदि $\phi(p)\underset{\rho}{\overset{S}{=}}f(t)$

तथा $h(p)\{x+h(p)\}^{-\rho}\,\psi(p)\underset{\nu}{\overset{\mathcal{J}}{=}}g(x,t)$

तो

$$\psi(p)\phi\{h(p)\}\overset{\mathcal{J}}{\underset{\nu}{=}}\int_0^\infty g(x,t)\,f(x)\,dx, \tag{3.15}$$

यदि $|g(x, t)|$ का हैंकेल परिवर्त तथा $|f(t)|$ का स्टाइल्जे परिवर्त विद्यमान हो। $R\{h(p)\}>0$; $\psi(p)$, $h(p)$ ये p के शतत फलन हैं जो x पर आधारित नहीं हैं और (3.15) का समाकल पूर्णरूपेण अभिसारी है।

विशिष्ट दशा : यदि $h(p)=p$, $\psi(p)=p^{\lambda-5/2}$, तो [2, p. 23] के द्वारा

$$\pi^{-1}\,p^{\lambda-5/2}\,\phi(p)\Gamma\rho\,\sin\,(\lambda+\nu-\rho+1)\pi\,\overset{\mathcal{J}}{\underset{\nu}{=}}$$

$$t^{3/2}\int_0^\infty x^{\lambda-\rho}\left\{\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\,(xt/z)^{\nu+2m}\Gamma(\lambda+\nu+2m)}{m!\,\Gamma(\nu+m+1)\Gamma(\lambda+\nu-\rho+2m+1)}\right. \tag{3.16}$$

$$\left.-\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(xt/z)^{\rho-\lambda+m}\Gamma(\rho+m)\,\sin\{\frac{1}{2}(\lambda+\nu-\rho+m+1)\pi\}}{m!\,\Gamma\frac{1}{2}(\rho+\nu-\lambda+m+2)\Gamma\frac{1}{2}(\rho-\nu-\lambda+m+2)}\right\}f(x)\,dx$$

जहाँ $R(\lambda+\nu)>0$, $R(\lambda-\rho)<5/2$, $p>0$, $|\arg x|<\pi$.

प्रमेय : यदि $\phi(p)\overset{H}{\underset{\mu}{=}}f(t)$

$$x^{1/2}\{h(p)\}^{3/2}\,H_\mu\{xh(p)\}\,\psi(p)\overset{\mathcal{J}}{\underset{\nu}{=}}g(x,t)$$

तो

$$\psi(p)\,\phi\{h(p)\}\overset{\mathcal{J}}{\underset{\nu}{=}}\int_0^\infty g(x,t)\,f(x)\,dx, \tag{3.17}$$

जहाँ $|g(x, t)|$ का हैंकेल परिवर्त तथा $|f(t)|$ का H_μ परिवर्त विद्यमान है। $R\{h(p)\}>0$; $\psi(p)$, $h(p)$ ये p के शतत फलन हैं जो x पर आधारित नहीं हैं और (3.17) का समाकल पूर्णरूपेण अभिसारी है।

विशिष्ट दशा : माना कि $h(p)=p$, $\psi(p)=p^{\lambda-3/2}$
तो [2, p. 73] के द्वारा

(3·18)

$$\frac{p^{\lambda-3/2}}{2^{\lambda+1/2}}\phi(p)\overset{\mathcal{J}}{\underset{\nu}{=}}t^{-\lambda}\int_0^\infty G_{33}^{21}\left\{\frac{t^2}{x^2}\,\middle|\,\begin{matrix}(1-\mu)/2,\,1-\mu/2,\,1+\mu/2\\ \frac{3}{4}+(\lambda+\nu)/2,(1-\mu)/2,\frac{3}{4}+(\lambda-\nu)/2\end{matrix}\right\}f(x)\,dx$$

जहाँ $-\frac{5}{2}-R(\nu)<R(\lambda+\mu)<0$, $p>0$.

प्रमेय : यदि
$$\phi(p) \underset{\mu}{\overset{\Upsilon}{=}} f(t)$$

तथा
$$x^{1/2}\{h(p)\}^{3/2}\Upsilon_\mu\{xh(p)\}\psi(p) \underset{\nu}{\overset{\mathcal{J}}{=}} g(x, t)$$

तो

$$\psi(p)\phi\{h(p)\} \underset{\nu}{\overset{\mathcal{J}}{=}} \int_0^\infty g(x, t)\, f(x)dx, \tag{3·19}$$

यदि $g(x, t)$ का हैंकेल परिवर्त तथा $f(t)$ का γ परिवर्त विद्यमान हो। $R\{h(p)\}>0$; $\psi(p)$. $h(p)$ ये p के शतत फलन हैं जो x पर आधारित नहीं हैं तथा (3·19) का समाकल पूर्णरूपेण अभिसारी है।

विशिष्ट दशा : माना कि $h(p)=p$, $\psi(p)=p^{s-2}$
तो [2, p. 54] द्वारा हमें निम्नलिखित परिणाम मिलता है :

$$\frac{\pi\Gamma(1+\nu)2^{1-s}p^{s-2}}{\sin\{\frac{1}{2}\pi(\nu-\mu+s-1)\}\Gamma\frac{1}{2}(s-\mu+\nu)\Gamma\frac{1}{2}(s+\mu+\nu)}\phi(p) \underset{\nu}{\overset{\mathcal{J}}{=}} t^{\nu+5/2}\int_0^\infty x^{-\nu-3/2} \tag{3·20}$$

$$\times {}_2F_1\left\{{(s+\mu+\nu)/2, (s-\mu+\nu)/2 \atop \nu+1}; \frac{t^2}{x^2}\right\} f(x)dx,$$

जहाँ $R(\pm\mu-\nu)<R(s)<1$.

प्रमेय : यदि
$$\phi(p) \doteq f(t)$$

तथा
$$h(p)e^{-h(p)x}\psi(p) \underset{\nu}{\overset{\mathcal{J}}{=}} g(x, t)$$

तो

$$\psi(p)\phi\{h(p)\} \underset{\nu}{\overset{\mathcal{J}}{=}} \int_0^\infty g(x, t)\, f(x)dx, \tag{3·21}$$

यदि $g(x, t)$ का हैंकेल परिवर्त तथा $f(t)$ का लैपलास परिवर्त विद्यमान हो। $R\{h(p)\}>0$; $\psi(p)$, $h(p)$ ये p के शतत फलन हैं जो x पर आधारित नहीं हैं और (3·21) का समाकल पूर्णरूपेण अभिसारी है।

विशिष्ट दशा : माना कि $h(p)=p$, $\psi(p)=p^{\mu-3/2}$ तो [2, p. 29] द्वारा हम

$$\frac{p^{\mu-3/2}\,\phi(p)}{\Gamma(\mu+\nu)} \underset{\nu}{\overset{\mathcal{J}}{}} t^{3/2}\int_0^\infty (x^2+t^2)^{-\mu/2}\, P_{\mu-1}^{-\nu}\{x(x^2+t^2)^{-1/2}\} f(x)\,dx, \tag{3.22}$$

प्राप्त करते हैं जहाँ $R(\mu+\nu)>0$, $p>0$.

4. इन अनुभाग में हम (3.6) द्वारा अथवा समाकलन के चिन्ह के अन्तर्गत उत्तरोत्तर समाकलन द्वारा दो चरों वाली कतिपय न्यष्टियों के प्रतिविम्ब प्राप्त करेंगे। इस विधि को दो प्रतिबिम्बों की प्राप्ति द्वारा प्रदर्शित किया गया है और फिर इसी विधि से शेष प्रतिबिम्बों को प्राप्त करके सारणीबद्ध कर दिया गया है।

उदाहरण 1. माना कि $f(x, y)=(xy)^{1/2} e^{-axy}$

तो (3.6) द्वारा

$$\phi(p, q)=pq\int_0^\infty\int_0^\infty (px)^{1/2}(qy)^{1/2}J_\mu(px)\cdot J_\nu(qy)(xy)^{-1/2}e^{-axy}\,dx\,dy$$

$$=pq\int_0^\infty (qy)^{1/2}J_\nu(qy)y^{-1/2}\left[\int_0^\infty (px)^{1/2}J_\mu(px)x^{-1/2}e^{-axy}\,dx\right]dy$$

अब [2, p. 28] द्वारा x-समाकल ज्ञात करने पर

$$=p^{3/2-\mu}a^{\mu-1}q\int_0^\infty (qy)^{1/2}J_\nu(qy)[y^{-1/2}(y^2+p^2a^{-2})^{-1/2}$$
$$\times\{(y^2+p^2a^{-2})^{1/2}-y\}^\mu]dy$$

[2, p. 26] के प्रयोग करने पर यह

$$(4.1)\qquad =\frac{(pq)^{3/2}}{a}I_{\nu-\mu/2}\left(\frac{pq}{2a}\right)K_{(\nu-\mu)/2}\left(\frac{pq}{2a}\right)$$

में परिणत हो जाता है जहाँ $q>0, R(p)>0, R(\nu)>-1, R(\mu)<3/2, R(a)>0.$

उदाहरण 2. माना कि $f(x, y)=x^{2\rho-\mu-5/2}y^\sigma W_{\alpha,\beta}(axy)W_{-\alpha,\beta}(axy)$

तो

$$\phi(p, q)=pq\int_0^\infty\int_0^\infty (px)^{1/2}(qy)^{1/2}J_\mu(px)J_\nu(qy)x^{2\rho-\mu-5/2}y^\sigma W_{\alpha,\beta}(axy)$$
$$W_{-\alpha,\beta}(axy)\,dx\,dy,$$

$$=pq\int_0^\infty (qy)^{1/2}J_\nu(qy)y^\sigma\left[\int_0^\infty (px)^{1/2}J_\mu(px)x^{2\rho-\mu-5/2}\right.$$
$$\left.\times W_{\alpha,\beta}(axy)W_{-\alpha,\beta}(axy)\,dx\right]dy,.$$

अब [2, p. 86] की सहायता से x-समाकल का मान ज्ञात करने पर

$$=\frac{2^{-\mu-1}a^{-2\rho-1}p^{\mu+7/2}q}{\Gamma\rho\Gamma(\rho+\frac{1}{2})}\int_0^\infty (qy)^{1/2}J_\nu(qy)^{\sigma-2}$$
$$\times G_{44}^{41}\left(\frac{a^2y^2}{p^2}\middle|\begin{matrix}2, \frac{3}{2}+\alpha+\rho, \frac{3}{2}-\alpha+\rho, 2+\mu\\ 1+\rho, \frac{3}{2}+\rho, 1+\rho+\beta, 1+\rho-\beta\end{matrix}\right)dy$$

प्राप्त होता है।

[2 p. 91] का प्रयोग करने पर

$$(4.2) \quad = \frac{2^{\sigma-\mu-5/2} a^{-2\rho-1} p^{\mu+7/2} q^{2-\sigma}}{\Gamma\rho\Gamma(\rho+\frac{1}{2})} G_{64}^{42}\left(\frac{4a^2}{p^2q^2}\middle| \begin{matrix} h, 2, \frac{3}{2}+\alpha+\rho, \frac{3}{2}+\rho-\alpha, 2+\mu, k \\ 1+\rho, \frac{3}{2}+\rho, 1+\rho+\beta, 1+\rho-\beta \end{matrix}\right)$$

में परिणत हो जाता है जहाँ

$$h=\frac{5}{4}-\frac{\sigma+\nu}{2},\ k=\frac{5}{4}-\frac{\sigma-\nu}{2},\ |\arg a/p|<\pi,\ R\left(\rho+\frac{\nu+3}{4}\right)>0,$$

$$R\left(2+2\rho\pm\beta+\frac{\nu}{2}\right)>0,\ R(\rho)<-1/2,\ p>0.$$

सारणी

क्रमांक	$f(x,y)$	$\phi(p,q)=pq\int_0^\infty\int_0^\infty (px)^{1/2}(qy)^{1/2}J_\mu(px)J_\nu(qy)f(x,y)\,dx\,dy \quad p,q>0$
1.	$x^\alpha y^\beta$	$\dfrac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{\alpha}{2}+\frac{\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{\beta}{2}+\frac{\nu}{2}\right)}{p^\alpha q^\beta\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{\alpha}{2}+\frac{\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{\beta}{2}+\frac{\nu}{2}\right)}$ $-R(\mu,\nu)-\frac{3}{2}<R(\alpha,\beta)<-\frac{1}{2}.$
2.	$x^{\mu+1/2}y^{\nu+1/2}(a^2+x^2)^{-1}(b^2+y^2)^{-1}$	$a^\mu b^\nu (pq)^{3/2}K_\mu(ap)K_\nu(bq)$ $R(a,b)>0,\ -1<R(\mu,\nu)<3/2.$
3.	$x^{\alpha-3/2}y^\beta e^{-axy}$	$a^{-\alpha}p^{3/2}q^{\alpha-1/2}e^{-pq/a}\cdot\dfrac{\Gamma(\alpha+\mu)}{\Gamma(\alpha+\nu)}$ $R(a)>0,\ R(\alpha+\mu)>0,\ R(\beta+\nu)>0.$
4.	$(xy)^{-1/2}e^{-ax^2y^2}$	$\frac{1}{4}\left(\frac{p^3q^3}{a}\right)^{1/2}\times G_{41}^{12}\left(\frac{16a}{p^2q^2}\middle\| \begin{matrix}1-\frac{1}{2}\nu, 1-\frac{1}{2}\mu, 1+\frac{1}{2}\mu, 1+\frac{1}{2}\nu \\ 1/2\end{matrix}\right)$ $R(a)>0,\ R(\nu)>-1,\ \|\arg\frac{4a}{p^2}\|<\pi/2$

5.	$(xy)^{-3/2}e^{-a/xy}$	$(2\pi)^{-1/2}(pq)^{3/2}G^{04}_{60}\left(\frac{64}{a^2p^2q^2}\middle\vert\, 1-\nu/2,\ 1-\mu/2,\ \frac{1}{2},\ 1,\ 1+\mu/2,\ 1+\nu/2\right)$ $R(a)>0,\ \vert\arg 16/a^2p^2\vert<\pi,\ R(\pm\nu)<3/2.$
6.	$(xy)^{-\lambda-1/2}K_\xi(axy)$ $R(-\lambda+\mu+1)$ $<\vert R(\xi)\vert,\ R(a)>0,$	$\frac{(pq)^{\mu+3/2}}{2^{\lambda+\mu+2}a^{\mu-\lambda+1}}\,G^{22}_{24}\left(\frac{p^2q^2}{4a^2}\middle\vert\begin{matrix}\frac{1}{2}(1-\mu+\lambda-\xi),\ \frac{1}{2}(1-\mu+\lambda+\xi)\\ \frac{1}{2}(\nu-\mu),\ 0,\ -\mu,\ -\frac{1}{2}(\mu+\nu)\end{matrix}\right)$ $-R(\nu)-1-2\min\,[R\{\frac{1}{2}(\nu-\lambda\pm\mu+1)\}$ $<R(\lambda)<-1/2.$
7.	$(xy)^{\lambda}e^{-(a^2x^2y^2/4)}$ $K_\xi\left(\frac{a^2x^2y^2}{4}\right)$ $\vert\arg a\vert<\pi/4,\ R(\lambda+\mu$	$\frac{2^{2\lambda+1}}{(pq)^{\lambda}\sqrt{\pi}}\,G^{22}_{52}\left(\frac{8a^2}{p^2q^2}\middle\vert\begin{matrix}\frac{1}{4}-\{(\lambda+\nu)/2\},\ \frac{1}{4}-(\lambda+\mu)/2,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4}-(\lambda-\mu)/2,\ \frac{1}{4}-(\lambda-\nu)/2\\ \xi,\ -\xi\end{matrix}\right)$ $\pm2\xi)>-3/2, R(\mu+\nu+3)>0, R(5-2\lambda+4\xi)$ $<3.$
8.	$x^{\alpha-3/2}y^{\delta-3/2}e^{-axy}$ $\mathcal{J}_\xi(\beta xy)$ $R(a)>I_m(\beta)>0,$ $R(p)>0,$	$\Gamma(1+\mu)2^{\delta-1}p^{3/2}q^{3/2-\delta}\sum_{m=0}^{\infty}\left(-\frac{\beta^2}{4a^2}\right)^m$ $\frac{\Gamma(\alpha+\xi+\mu+2m)}{\Gamma(-m)\Gamma(-\xi-m)\Gamma(\xi+m+1)m!}$ $G^{22}_{24}\left(-\frac{p^2q^2}{4\beta^2}\middle\vert\begin{matrix}1+m,\ 1+\xi+m\\ \frac{\delta+\nu}{2},\ 0,\ -\mu,\ \frac{\delta-\nu}{2}\end{matrix}\right)$ $R(\alpha+\xi+\mu)>0,\ -1-R(\nu)+2\min(\mu)$ $<R(\delta)<-1/2.$

कृतज्ञता-ज्ञापन

इस शोधपत्र की तैयारी में डा० के० सी० शर्मा ने लेखक की सहायता की जिसके लिये वह उनका आभारी है।

निर्देश

1. एर्डेल्यी तथा अन्य। Tables of Integral Transforms, **भाग** 2, 1954, **मैकग्राहिल, न्यूयार्क**.

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका
1968, **11**, 121-128

VIJNANA PARISHAD
ANUSANDHAN PATRIKA
1968, **11**, 121-128

सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय बहुपदी के समाकल सम्बन्ध

मणिलाल शाह
गणित विभाग, पी० एम० बी० जी० कालेज, इंदौर

[प्राप्त—अक्टूबर 4, 1967]

सारांश

एक सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय बहुपदी के समाकल सम्बन्धों को बहुपदी की परिभाषा निम्नांकित प्रकार से करते हुये प्रस्तुत किया गया है :–

$$F_n(x)=x^{(\delta-1)n}\ {}_{p+\delta}F_q\left[\begin{matrix}\triangle(\delta,-n),\ a_1, a_2 \ldots a_p \\ b_1, b_2 \ldots b_q\end{matrix}, \mu x^c\right]$$

जहाँ $\triangle(\delta,-n)$ से $\frac{-n}{\delta}, \frac{-n+1}{\delta} \ldots \frac{-n+\delta-1}{\delta}$.

प्राचलों की अभिव्यक्ति की गई है और δ, n धन पूर्णसंख्याएँ हैं। विशिष्ट दशाओं पर भी विचार किया गया है।

Abstract

Integral representations for a generalised Hypergeometeric polynomial. *By* Manilal Shah, Department of Mathematics, P. M. B. G. College, Indore (M.P.).

Intrgral relations for a generalised hypergeometric polynomial have been given by defining the polynomial as

$$F_n(x)=x^{(\delta-1)n}{}_{p+\delta}F_q\left[\begin{matrix}\triangle(\delta, -n), a_1, a_2, \ldots, a_p \\ b_2, b_2, \ldots, b_q\end{matrix} ; \mu x^c\right]$$

where $\triangle(\delta,-n)$ denotes for the set of parameters

$$\frac{-n}{\delta}, \frac{-n+1}{\delta} \ldots, \frac{-n+\delta-1}{\delta}$$

and δ, n are positive integers. Special cases have also been considered.

1. यहाँ हम एक सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय बहुपदी के कतिपय समाकल सम्बन्ध देंगे। बहुपदी एक सार्वीकृत रूप में है जिससे यथेष्ट प्राचलों के चुनाव द्वारा कई ज्ञात तथा अज्ञात परिणाम प्राप्त होते हैं।

सुगमता एवं संक्षेपण की दृष्टि से हम निम्नांकित संकेत का उपयोग करेंगे :--

$$_pF_q(x) = {}_pF_q\left(\begin{matrix}a_p\\ b_q\end{matrix}\Big| x\right) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(a_p)_r}{(b_q)_r} \frac{x^r}{r!}.$$

फलतः $(a_p)_r$ को $\prod_{j=1}^{p} (a_j)_r$ रूप में तथा इसी प्रकार $(b_q)_r$ के लिये माना जावेगा।

हमने सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय बहुपदी [(6), eqn. (2.1)] को निम्न रूप में पारिभाषित किया है :

$$(1.1) \qquad F_n(x) = x^{(\delta-1)n}{}_{p+\delta}F_q\left[\begin{matrix}\triangle(\delta, -n), a_p\\ b_q\end{matrix}; \mu x^c\right]$$

जहाँ $\triangle(\delta, -n)$ द्वारा δ-प्राचल $\frac{-n}{\delta}, \frac{-n+1}{\delta}, \ldots\ldots, \frac{-n+\delta-1}{\delta}$

प्रदर्शित हैं और δ, n धन पूर्ण संख्यायें है।

2. इस अनुभाग में हम सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय बहुपदी के समाकल सम्बन्धों को अंकित करेंगे :

$$(2.2) \qquad x^{(\delta-1)n}{}_{p+\delta}F_q\left[\begin{matrix}\triangle(\delta, -n), a_p\\ b_q\end{matrix}; \mu x^c\right]$$

$$= \frac{x^{(\delta-1)n}\Gamma(b_1)}{\Gamma(a_1)\Gamma(b_1-a_1)} \int_0^1 Z^{a_1-1}(1-Z)^{b_1-a_1-1}$$

$$_{p-1+\delta}F_{q-1}\left[\begin{matrix}\triangle(\delta, -n), a_2, \ldots, a_p\\ b_2, \ldots, b_q\end{matrix}; \mu x^c Z\right] dZ$$

$$Re(b_1) > Re(a_1) > 0.$$

$$(2.2) \qquad x^{(\delta-1)n}{}_{p+\delta}F_q\left[\begin{matrix}\triangle(\delta, -n), a_p\\ b_q\end{matrix}; \mu x^c\right]$$

$$=\frac{x^{(\delta-1)n}\Gamma(b_3)}{\Gamma(a_2)\Gamma(b_3-a_2)}\int_0^1 Z^{a_2-1}(1-Z)^{b_3-a_2-1}$$

$$_{p-1+\delta}F_{q-1}\left[\begin{matrix}\triangle(\delta,-n),a_1,a_3\ldots,a_p\\ b_1,b_2,b_4,\ldots,b_q\end{matrix};\mu x^c Z\right]dZ$$

$$Re(b_3)>Re(a_2)>0.$$

(2.2) की विशिष्ट दशायें ;—

$\delta=c=1, a_1=n+\alpha+\beta+1,\ b_1=1+\alpha,\ b_2=\frac{1}{2}$ होने पर तथा दोनों ओर $\frac{(1+\alpha)}{n!}n$, से गुणा करने पर

$$f_n^{(\alpha,\beta)}\begin{pmatrix}a_2,\ldots,a_p\\ b_3,\ldots,b_q\end{pmatrix};\mu x\Big) \tag{2.3}$$

$$=\frac{\Gamma(b_3)}{\Gamma(a_2)\Gamma(b_3-a_2)}\int_0^1 Z^{a_2-1}(1-Z)^{b_3-a_2-1}f_n^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{matrix}a_3,\ldots,a_p\\ b_4,\ldots,b_q\end{matrix};\mu x Z\right)dZ$$

$$Re(b_3)>Re(a_2)>0,$$

जहाँ $f_n^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{matrix}a_2,\ldots,a_p\\ b_3,\ldots,b_q\end{matrix};x\right)=\frac{(1+\alpha)_n}{n!}{}_{p+1}F_q\left[\begin{matrix}-n,n+\alpha+\beta+1,a_2,\ldots,a_p\\ 1+\alpha,\frac{1}{2},b_3,b_4,\ldots,b_q\end{matrix};x\right]$

सार्वीकृत सिस्टर सेलीन की बहुपदी [(6), eqn. (2.2)] है जो एक ज्ञात परिणाम [(1), p. 810, eqn. (18)] में $\alpha=\beta=0$ तथा $\mu=1$. होने पर परिणत हो जाती है ।

(i) (2.3) में $p=q=3, a_2=\xi,\ a_3=\frac{1}{2},\ b_3=p$ तथा $\mu=1$ रखने पर हमें एक ज्ञात परिणाम [(2), p. 157, eqn. (2.1)] प्राप्त होता है जो $\alpha=\beta=0$ पर पुनः एक ज्ञात परिणाम [(5), p. 109, eqn. (1.2)] में परिणत हो जाता है।

(2.1) की विशिष्ट दशा :—

$\delta=2,\ c=-2,\ p=1,\ q=2,\ a_1=\gamma-\beta,\ b_1=\gamma,\ b_2=1-\beta-n,\ \mu=1$

रखने पर तथा दोनों ओर $\frac{2^n(\beta)_n}{n!}$, से गुणा करने पर हमें

$$(2.4)\qquad R_n(\beta,\gamma;x)=\frac{(2x)^n(\beta)_n\Gamma(\gamma)}{n!\,\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(\beta)}\int_0^1 Z^{\gamma-\beta-1}(1-Z)^{\beta-1}$$

$$\times {}_2F_1\left[\begin{matrix}\triangle(2,-n)\\ 1-\beta-n\end{matrix};\ x^{-2}Z\right]dZ,\ Re(\gamma)>Re(\beta)>0,$$

प्राप्त होगा जहाँ $R_n(\beta,\gamma;x)$ बेडीण्ट का बहुपदी [(4), p. 297, eqn. (1)] है। अब (2.1) को और आगे सार्वीकृत करते हुये सार्वीकृत बहुपदी को हम इस प्रकार लिखेंगे :

$$(2.5)\qquad x^{(\delta-1)n}\ {}_{p+\delta}F_q\left[\begin{matrix}\triangle(\delta,-n),\ a_p\\ b_q\end{matrix};\ \mu x^c\right]$$

$$=x^{(\delta-1)n}\prod_{j=1}^{k}\left[\frac{\Gamma(b_j)}{\Gamma(a_j)\Gamma(b_j-a_j)}\right]\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1 Z_1^{a_1-1}(1-Z)^{b_1-a_1-1}Z_2^{a_2-1}$$

$$(1-Z_2)^{b_2-a_2-1}\ldots Z_k^{a_k-1}(1-Z_k)^{b_k-a_k-1}\ {}_{p-k+\delta}F_{q-k}$$

$$\left[\begin{matrix}\triangle(\delta,-n),\ a_{k+1},\ldots,a_p\\ b_{k+1},\ldots,b_q\end{matrix};\ \mu x^c Z_1Z_2\ldots Z_k\right]dZ_1\,dZ_2\ldots dZ_k$$

$$Re(b_j)>Re(a_j)>0,\ j=1,2,\ldots k.$$

जो $\delta=c=\mu=1$, $a_{k+1}=n+\alpha+\beta+1$, $b_{k+1}=1+\alpha$, $a_l=b_m$ होने पर एक ज्ञात परिणाम [(3), p. 116, eq. (7.5.2)] में परिणत हो जाता है यदि $l=k+2,\ldots,$ p, तथा $m=k+2,\ldots,q$ और दोनों ओर $\frac{(1+\alpha)_n}{n!}$ से गुणा कर दिया जावे।

(2.1)(2.2),(2.3) तथा (2.4) में $Z=\frac{t}{1+t}$ रखने पर तथा (2.5) में $Z_1=\frac{t_1}{1+t_1}$, $Z_2=\frac{t_2}{1+t_2}$ इत्यादि रखने पर हमें निम्नांकित की प्राप्ति होगी:

$$(2.6)\qquad x^{(\delta-1)n}\ {}_{p+\delta}F_q\left[\begin{matrix}\triangle(\delta,-n),\ a_p\\ b_q\end{matrix};\ \mu x^c\right]$$

$$=\frac{x^{(\delta-1)n}\,\Gamma(b_1)}{\Gamma(a_1)\,\Gamma(b_1-a_1)}\int_0^\infty\frac{t^{a_1-1}}{(1+t)^{b_1}}\ {}_{p-1+\delta}F_{q-1}\left[\begin{matrix}\triangle(\delta,-n),\ a_2,\ldots,a_p\\ b_2,\ldots,b_q\end{matrix};\ \frac{\mu t x^c}{1+t}\right]dt$$

$$Re(b_1)>Re(a_1)>0.$$

$$(2.7)\qquad x^{(\delta-1)n}\ {}_{p+\delta}F_q\left[\begin{matrix}\triangle(\delta,-n),\ a_p\\ b_q\end{matrix};\ \mu x^c\right]$$

$$=\frac{x^{(\delta-1)n}\,\Gamma(b_3)}{\Gamma(a_2)\,\Gamma(b_3-a_2)}\int_0^\infty\frac{t^{a2-1}}{(1+t)^{b_3}}\ {}_{p-1+\delta}F_{q-1}\left[\begin{matrix}\triangle(\delta,-n),\ a_1,a_3,\ldots,a_p\\ b_1,b_2,b_4,\ldots,b_q\end{matrix};\ \frac{\mu t x^c}{1+t}\right]dt$$

$$Re(b_3)>Re(a_2)>0.$$

(2.8) $$f_n^{(\alpha,\beta)}\begin{pmatrix}a_2,\ldots,a_p\\ b_3,\ldots,b_q\end{pmatrix};\mu x\Big)$$
$$=\frac{\Gamma(b_3)}{\Gamma(a_2)\Gamma(b_3-a_2)}\int_0^\infty \frac{t^{a_2-1}}{(1+t)^{b_3}} f_n^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{matrix}a_3,\ldots,a_p\\ b_4,\ldots,b_q\end{matrix};\frac{\mu tx}{1+t}\right)dt$$
$$Re(b_3)>Re(a_2)>0.$$

यह एक ज्ञात परिणाम [(2), p. 158, eqn. (3.1)] है जो $p=q=3$, $a_2=\xi$, $a_3=\frac{1}{2}$, $b_3=p$, $\mu=1$ पर मिलता है और $\alpha=\beta=0$ होने पर इसके आगे एक ज्ञात परिणाम [(5), p.110, eqn. (1.6)] में परिणत हो जाता है।

(2.9) $$Rn(\beta,\gamma;x)=\frac{(2x)^n\Gamma(\gamma)(\beta)_n}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)n!}\int_0^\infty \frac{t^{\gamma-\beta-1}}{(1+t)^\gamma}$$
$$\times{}_2F_1\left[\begin{matrix}\Delta(2,-n);\\ 1-\beta-n\end{matrix}\;\frac{tx^{-2}}{1+t}\right]dt$$
$$\text{Re}(\gamma)>\text{Re}(\beta)>0.$$

(2.10) $$x^{(\delta-1)n}\,{}_{p+\delta}F_q\left[\begin{matrix}\Delta(\delta,-n),a_p;\ \mu x^c\\ b_q\end{matrix}\right]$$
$$=x^{(\delta-1)n}\prod_{j=1}^{k}\left[\frac{\Gamma(b_j)}{\Gamma(a_j)\,\Gamma(b_j-a_j)}\right]\int_0^\infty\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty \frac{t_1^{a_1-1}t_2^{a_2-1}\cdots t_k^{a_k-1}}{(1+t_1)^{a_1}(1+t_2)^{a_2}\cdots(1+t_k)^{a_k}}$$
$$\times{}_{p-k+\delta}F_{q-k}\left[\begin{matrix}\Delta(\delta,-n),a_{k+1},\ldots,a_p;\\ b_{k+1},\ldots,b_q\end{matrix}\;\frac{\mu t_1t_2\ldots t_k\,x^c}{(1+t_1)(1+t_2)\cdots(1+t_k)}\right]dt_1dt_2\ldots dt_k$$
$$Re(b_j)>Re(a_j)>0,\ j=1,2,\ldots,k.$$

अब $\delta=c=\mu=1$, $a_{k+1}=n+\alpha+\beta+1$, $b_{k+1}=1+\alpha$, $a_l=b_m$ जहाँ $l=k+2,\ldots,p$ तथा $m=k+2,\ldots,q$ तथा (2.10) में दोनों ओर $\frac{(1+\alpha)}{n!}n$, से गुणा करने पर हमें एक ज्ञात परिणाम [(3), p. 116, eqn. (7.5.3)] प्राप्त होता है।

3. इस अनुभाग में हम सार्वीकृत बहुपदी के समाकल अंकनों की विवेचना भिन्न रूप में प्रस्तुत करेंगे :

(3.1) $$x^{(\delta-1)n}\,{}_{p+\delta}F_q\left[\begin{matrix}\Delta(\delta,-n),a_p;\ \mu x^c\\ b_q\end{matrix}\right]$$
$$=\frac{x^{(\delta-1)n}}{\Gamma(a_1)}\int_0^\infty e^{-z}\,z^{a_1-1}\,{}_{p-1+\delta}F_q\left[\begin{matrix}\Delta(\delta,-n),a_2,\ldots,a_p;\ \mu x^c Z\\ b_1,\ldots,b_q\end{matrix}\right]dz$$
$$Re(a_1)>0.$$

$$(3.2)\quad x^{(\delta-1)n}\ {}_{p+\delta}F_q\left[\begin{matrix}\Delta(\delta,-n),\ a_p\\ b_q\end{matrix};\ \mu x^c\right]$$
$$=\frac{x^{(\delta-1)n}}{\Gamma(a_2)}\int_0^\infty e^{-z}\ z^{a_2-1}\ {}_{p-1+\delta}F_q\left[\begin{matrix}\Delta(\delta,-n),\ a_1,\ a_3,\ \ldots,\ a_p\\ b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_q\end{matrix};\ \mu x^c z\right]dz$$
$$Re(a_2)>0.$$

(3.2) की विशिष्ट दशायें :

$\delta=c=1,\ a_1=n+\alpha+\beta+1,\ b_1=1+\alpha,\ b_2=\frac{1}{2}$ मानने पर तथा दोनों ओर $\frac{(1+\alpha)}{n!}n$, से गुणा करने पर

$$(3.3)\quad f_n^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{matrix}a_2,\ \ldots,\ a_p\\ b_3,\ \ldots,\ b_q\end{matrix};\ \mu x\right)=\frac{1}{\Gamma(a_2)}\int_0^\infty e^{-z}\ z^{a_2-1} f^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{matrix}a_3,\ \ldots,\ a_p\\ b_3,\ \ldots,\ b_q\end{matrix};\mu x z\right)dz$$
$$Re(a_2)>0,$$

जो $\alpha=\beta=0,\ a_2=b_3=\frac{1}{2}$ तथा $\mu=1$ होने पर एक ज्ञात परिणाम [(1), p. 610, eqn. (17)] में परिणत हो जाता है।

(i) (3.3) में $p=q=3,\ a_2=\xi,\ a_3=\frac{1}{2},\ b_3=p$ तथा $\mu=1$ रखने पर हमें एक ज्ञात परिणाम [(2), p. 158, eqn (3.3)] प्राप्त होगा।

(3·1) की विशिष्ट दशा :

$$\delta=2,\ c=-2,\ p=1,\ q=2,\ a_1=\gamma-\beta,\ b_1=\gamma,\ b_2=1-\beta-n,\ \mu=1$$

रखने पर तथा दोनों ओर $\frac{2^n(\beta)_n}{n!}$, से गुणा करने पर

$$(3.4)\quad R_n(\beta,\gamma;\ x)=\frac{(\alpha x)^\beta(\beta)_n}{n!\,\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^\infty e^{-z}\ z^{\gamma-\beta-1}$$
$$\times{}_2F_2\left[\begin{matrix}\Delta(2,-n)\\ \gamma,\ 1-\beta-n\end{matrix};\ x^{-2}z\right]dz,\quad Re(\gamma)>Re(\beta)>0.$$

परिणाम (3.1) को और भी व्यापक बनाकर सार्वीकृत बहुपदी को निम्न रूप में लिख सकते हैं :

$$(3.5)\quad x^{(\delta-1)n}\ {}_{p+\delta}F_q\left[\begin{matrix}\Delta(\delta,-n),\ a_p\\ b_q\end{matrix};\ \mu x^c\right]$$
$$=\frac{x^{(\delta-1)n}}{\prod_{j=1}^{k}\Gamma(a_j)}\int_0^\infty\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty e^{-(z_1+z_2+\cdots+z_k)}z_1^{a_1-1}\ z_2^{a_2-1}\ \ldots\ z_k^{a_k-1}$$
$$\times{}_{p-k+\delta}F_q\left[\begin{matrix}\Delta(\delta,-n),\ a_{k+1},\ \ldots,\ a_p\\ b_1\ \ldots\ldots,\ b_q\end{matrix};\ \mu x^c z_1 z_2\ldots z_k\right]dz_1dz_2\ldots dz_k$$
$$Re(a_j)>0,j=1,\ 2,\ \ldots k.$$

(3.6)
$$x^{(\delta-1)n}\,{}_{p+\delta}F_q\left[\begin{matrix}\Delta(\delta,-n), a_p\\ b_q\end{matrix};\mu x^c\right]$$
$$=\frac{x^{(\delta-1)n+\sum_{j=1}^{k}\gamma_j}}{\prod_{j=1}^{k}\Gamma(\gamma_j)}\int_0^\infty\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k)x}\,\lambda_1^{\gamma_1-1}\,\lambda_2^{\gamma_2-1}\cdots\lambda_k^{\gamma_k-1}$$
$$\times{}_{p+\delta}F_{q+k}\left[\begin{matrix}\Delta(\delta,-n), a_p\\ \gamma_k, b_q\end{matrix};\mu x^{c+k}\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_k\right]d\lambda_1 d\lambda_2\ldots d\lambda_k$$
$$Re(x)>0,\ Re(\gamma_j)>0,\ j=1,2,\ldots,k.$$

4. इस अनुभाग में सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय बहुपदी के कंटूर समाकल सम्बन्ध दिये जावेंगे

(4.1)
$$x^{(\delta-1)n}\,{}_{p+\delta}F_q\left[\begin{matrix}\Delta(\delta,-n), a_p\\ b_q\end{matrix};\mu x^c\right]$$
$$=\frac{x^{(\delta-1)n}\Gamma(b_3)\Gamma(1+a_2-b_3)}{\Gamma(a_2)}\frac{1}{2\pi i}\int_L z^{-b_3}(1-z)^{b_3-a_2-1}$$
$$\times{}_{p-1+\delta}F_{q-1}\left[\begin{matrix}\Delta(\delta,-n), a_1, a_3,\ldots a_p\\ b_1, b_2, b_4,\ldots,b_q\end{matrix};\frac{\mu x^c}{z}\right]dz.$$

(4.2)
$$x^{(\delta-1)n}\,{}_{p+\delta}F_q\left[\begin{matrix}\Delta(\delta,-n), a_p\\ b_q\end{matrix};\mu x^c\right]$$
$$=\frac{x^{(\delta-1)n}\Gamma(b_3)\Gamma(1-a_2)}{\Gamma(b_3-a_2)}\frac{1}{2\pi i}\int_L z^{-b_3}(1-z)^{a_2-1}$$
$$\times{}_{p-1+\delta}F_{q-1}\left[\begin{matrix}\Delta(\delta,-n), a_1, a_3,\ldots\ldots, a_p\\ b_1, b_2, b_4,\ldots,b_q\end{matrix};\frac{-\mu(1-z)x^c}{z}\right]dz$$

क्रमशः $Re\,(a_2)>0$, तथा $Re(b_3)>Re(a_2)>0$ पर निर्भर है। L कोई ऐसा कंटूर है जो अनन्त पर प्रारम्भ होकर समाप्त होता है और सरल रेखा में विरूपित किया जा सकता है जिससे $\frac{1}{2}-i\infty$ तथा $\frac{1}{2}+i\infty$ को $z=0$ तथा $z=1$ विन्दुओं से बिना गये ही संयुक्त कर दे। हम एक अन्य समाकल की प्राप्ति L को वास्तविक अक्षि में $z=+1$ से $z=+\infty$ या $-\infty$ से 0 तक आगे जाता हुआ कर सकते हैं।

(4.1) तथा (4.2) की विशिष्ट दशायें:—

$\delta=c=1,\ a_1=n+\alpha+\beta+1,\ b_1=1+\alpha,\ b_2=\frac{1}{2}$ मानने पर तथा दोनों ओर $\frac{(1+\alpha)}{n!}n$, से गुणा करने पर हमें क्रमशः

(4.3)
$$f_n^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{matrix}a_2,\ldots,a_p\\ b_3,\ldots,b_q\end{matrix};\mu x\right)=\frac{\Gamma(b_3)\Gamma(1+a_2-b_3)}{\Gamma(a_2)}\frac{1}{2\pi i}\int_L z^{-b_3}(1-z)^{b_3-a_2-1}$$
$$\times f_n^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{matrix}a_3,\ldots,a_p\\ b_4,\ldots,b_q\end{matrix};\frac{\mu x}{z}\right)dz,\ Re(a_2)>0.$$

$$(4.4)\quad f_n^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{matrix}a_2,\ldots,a_p\\ b_3,\ldots,b_q\end{matrix};\ \mu x\right)$$

$$=\frac{\Gamma(b_3)\Gamma(1-a_2)}{\Gamma(b_3-a_2)}\frac{1}{2\pi i}\int_L z^{-b_3}(1-z)^{a_2-1}f_n^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{matrix}a_3,\ldots,a_p\\ b_4,\ldots,b_q\end{matrix};-\frac{(1-z)\mu x}{z}\right)dz$$

$$\text{Re}\,(b_3)>\text{Re}(a_2)>0.$$

प्राप्त होंगे। अब (4.3) तथा (4.4) में $p=q=3$, $a_2=\xi$, $a_2=\frac{1}{2}$, $b_3=p$, रखने पर हमें

$$(4.5)\qquad H_n^{(\alpha,\beta)}(\xi,p,\mu x)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(1+\xi-p)}{\Gamma(\xi)}\frac{1}{2\pi i}\int_L z^{-p}(1-z)^{p-\xi-1}$$

$$P_n^{(\alpha,\beta)}\left(1-\frac{2\mu x}{z}\right)dz$$

$$\text{Re}(\xi)>0,$$

प्राप्त होगा जो $\alpha=\beta=0$ तथा $\mu=1$ होने पर ज्ञात परिणाम [(5), p.109, eqn.(1.3)] में परिणत हो जावेगा।

$$(4.6)\qquad H_n^{(\alpha,\beta)}(\xi,p,\mu x)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(1-\xi)}{\Gamma(p-\xi)}\frac{1}{2\pi i}\int_L z^{-p}(1-z)^{\xi-1}P_n^{(\alpha,\beta)}$$

$$P_n\left(1+\frac{2(1-z)\mu x}{z}\right)dz$$

$$\text{Re}\,(p)>\text{Re}(\xi)>0.$$

यह एक ज्ञात परिणाम [(5), p. 109, eqn. (1.4)] है जो $\alpha=\beta=0$ तथा $\mu=1$ पर प्राप्त होता है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

इस शोधपत्र की तैयारी में जी० एस० टेकनिकल इंस्टीच्यूट के डा० वी० एम० भिसे ने लेखक की सहायता की है जिसके लिये वह उनका कृतज्ञ है।

निर्देश

1. फासेनमेयर, सिस्टर एम० सेलीन। **बुले० अमे० मैथ० सोसा०**, 1947, **35**, 806-812.

2. खंडेकर, पी० आर०। **प्रोसी० नेश० एके० साइंस (इंडिया)**, 1964, **34A**, 157-162.

3. वही। **पी-एच० डी० थीसिस, विक्रम विश्वविद्यालय, उज्जैन**, 1964.

4. रेनविले, ई० डी०। Special Functions, **न्यूयार्क**, 1960.

5. राइस, एस० ओ०। **ड्यूक मैथ० जर्न०**, 1940, **6**, 108-119

6. शाह, मणिलाल। **प्रोसी० नेश० एके० साइंस (इंडिया)**, 1967, 37(A).

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

Vol. 11 July 1968 No. 3

[The Research Journal of the Hindi Science Academy]

विज्ञान परिषद् अनुसंधान पत्रिका

भाग 11 | जुलाई 1968 | संख्या III

विषय-सूची

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 11, No. 3, July 1968, Pages 129-136

बेसेल परिवर्त सम्बन्धी कुछ प्रमेय

के० एस० सेवरिया
गणित विभाग, गवर्नमेंट कालेज, अजमेर

[प्राप्त—अक्टूबर 18, 1967]

सारांश

इस शोधपत्र का उद्देश्य बेसेल परिवर्त सम्बन्धी प्रमेयों को सिद्ध करना है तथा इन प्रमेयों को व्यवहृत करते हुये एपेल फलन F_4 तथा माइजर G फलन के गुणनफल सम्बन्धी समाकलों का मान ज्ञात करना है।

Abstract

Some theorems on Bessel transforms. *By* K. S. Sevaria, Department of Mathematics, Government College, Ajmer.

The object of the present paper is to prove some theorems on Bessel transforms and by the aplication of these theorems we have evaluated integrals involving products of Appell's function F_4 and Meijer G-function.

1 विषय प्रवेश—फलन $f(t)$ के माइजर परिवर्त, हैंकेल परिवर्त, γ-परिवर्त तथा H-परिवर्त को क्रमशः निम्नांकित प्रकार से पारिभाषित किया गया है :—

$$\psi(p)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, p\int_0^\infty (pt)^{1/2} K_\lambda (pt) f(t)\, dt, \tag{1.1}$$

$$\phi(p)=p\int_0^\infty (pt)^{1/2} J_\nu (pt) f(t)\, dt, \tag{1.2}$$

$$g(p)=p\int_0^\infty (pt)\, Y_\mu (pt) f(t)\, dt, \tag{1.3}$$

तथा

$$h(p)=p\int_0^\infty (pt)^{1/2} H_\nu (pt) f(t)\, dt. \tag{1.4}$$

ग्रौर इन्हें सांकेतकि रूप में क्रमशः

$$\psi(p)\,\frac{K}{\lambda}\,f(t), \quad \varphi(p)\,\frac{\mathcal{J}}{\nu}\,f(t), \quad g(p)\,\frac{Y}{\mu}\,f(t) \quad \text{तथा} \quad h(p)\,\frac{H}{\nu}$$

द्वारा व्यक्त किया गया है।

2. प्रमेय 1.

यदि $$\psi(p)\,\frac{K}{\lambda}\,(f)t \quad \text{तथा} \quad \phi(p)\,\frac{\mathcal{J}}{\lambda}\,t^{\sigma-3/2}f(t)$$

तो $$\phi(p)=\pi^{1/2}2^{\sigma}p^{3/2}\int_0^\infty t^{-\sigma-1}G_{22}^{01}\left(\frac{t^2}{p^2}\,\middle|\,\begin{matrix}1-\frac{1}{2}\nu,\ 1+\frac{1}{2}\nu\\(2\sigma+2\lambda+1)/4,\ (2\sigma-2\lambda+1)/4\end{matrix}\right)\psi(t)\,dt \qquad (2.1)$$

यदि समाकल अभिसारी हो तथा $f(t)$ का माइजर परिवर्त तथा $|\,t^{\sigma-3/2}f(t)\,|$ का हैंकेल परिवर्त विद्यमान हों तथा $p>0$

उपपत्ति— $\because\ \psi(p)\,\frac{K}{\lambda}f(t)$

तथा [2. p. 49]

$$t^{-\sigma}G_{22}^{01}\left(\frac{t^2}{c^2}\,\middle|\,\begin{matrix}1-\frac{1}{2}\nu,\ 1+\frac{1}{2}\nu\\(2\sigma+2\lambda+1)/4,\ (2\sigma-2\lambda+1)/4\end{matrix}\right)$$

$$\frac{K}{\lambda}\,\frac{p^\sigma}{\pi^{1/2}2^{\sigma}}\,G_{02}^{10}\left(\frac{c^2p^2}{4}\,\middle|\,\tfrac{1}{2}\nu,-\tfrac{1}{2}\nu\right)$$

$$=\frac{p^\sigma}{\pi^{1/2}2^{\sigma}}\,\mathcal{J}_\nu(cp)$$

$$=\phi(p),\quad R(\pm\lambda+\tfrac{3}{2}-\sigma)>0,\quad R(p)>0,\quad c>0$$

इन सम्बन्धों में माइजर परिवर्त के लिये पार्सेवाल गोल्डस्टीन प्रमेय में प्रयुक्त करने पर तथा यदि

$$\psi(p)\,\frac{K}{\lambda}\,f(t) \quad \text{तथा} \quad \phi(p)\,\frac{K}{\lambda}\,g(t)$$

तो $$\int_0^\infty \phi(t)f(t)t^{-1}\,dt=\int_0^\infty \psi(t)\,g(t)\,t^{-1}\,dt \qquad (2.2)$$

और हमें

$$\int_0^\infty t^{\sigma-1}\mathcal{J}_\nu(ct)f(t)\,dt=\pi^{1/2}2^{\sigma}\int_0^\infty t^{-\sigma-1}$$

$$\times\, G_{22}^{01}\left(\frac{t^2}{c^2}\,\middle|\,\begin{matrix}1-\frac{1}{2}\nu,\ 1+\frac{1}{2}\nu\\(2\sigma+2\lambda+1)/4,\ (2\sigma-2\lambda+1)/4\end{matrix}\right)\psi(t)\,dt$$

प्राप्त होगा। अब c को p द्वारा प्रतिस्थापित करके तथा (1.2) सम्बन्ध का उपयोग करने पर हमें (2.1) की प्राप्ति होगी।

$\lambda = \pm\frac{1}{2}$, रखने पर प्रमेय का स्वरूप निम्नांकित प्रकार होगा।

उपप्रमेय 1. यदि $\psi(p) \doteq f(t)$ तथा $\phi(p) \underset{\mu}{\overset{\mathcal{J}}{=}} t^{\sigma-1} f(t)$

तो
$$\phi(p) = \pi^{1/2} 2^{\sigma+1/2} p^{3/2} \int_0^\infty t^{-\sigma-3/2} G_{22}^{01}\left(\frac{t^2}{p^2} \middle| \begin{matrix} 1-\frac{1}{2}\mu, & 1+\frac{1}{2}\mu \\ \frac{3}{4}+\frac{1}{2}\sigma, & \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\sigma \end{matrix}\right) \psi(t)\, dt$$

यदि समाकल अभिसारी हो तथा $|f(t)|$ का लैपलास परिवर्त एवं $|t^{\sigma-1} f(t)|$ का हैंकेल परिवर्त विद्यमान हो तथा $p>0$.

उदाहरण 1. [1] को लेने पर यदि

$$f(t) = t^{l-3/2} \mathcal{J}_\rho(at) \mathcal{J}_\delta(bt)$$

$$\underset{\lambda}{\overset{K}{=}} \frac{2^{l-3/2} a^\rho b^\delta \Gamma(l+\rho+\delta-\lambda)/2\; \Gamma(l+\rho+\delta+\lambda)/2}{\pi^{1/2} p^{l+\rho+\delta-3/2} \Gamma(1+\rho)\Gamma(1+\delta)}$$

$$\times F_4\left(\frac{l+\rho+\delta-\lambda}{2}, \frac{l+\rho+\delta+\lambda}{2}; 1+\rho, 1+\delta; -\frac{a^2}{p^2} - \frac{b^2}{p^2}\right) \qquad (2.3)$$

$$= \psi(p), \quad R(p)>0, \quad a>0, \quad b>0, \quad R(l+\rho+\delta\pm\lambda)>0.$$

तब हमें [1] प्राप्त होगा।

$$t^{\sigma-3/2} f(t) = t^{\sigma+l-3} \mathcal{J}_\rho(at) \mathcal{J}_\delta(bt)$$

$$\underset{\nu}{\overset{\mathcal{J}}{=}} \frac{2^{\sigma+l-5/2} a^\rho b^\delta \Gamma(\rho+\delta+\nu+\sigma+l)/2 - 3/4}{p^{\rho+\delta+\sigma+l-3} \Gamma(1+\rho)\Gamma(1+\delta)\Gamma\{7/4 - (\rho+\delta+\sigma+l-\nu)/2\}}$$

$$\times F_4\left(\frac{\rho+\delta-\nu+\sigma+l}{2} - \frac{3}{4}, \frac{\rho+\delta+\nu+\sigma+l}{2} - \frac{3}{4}; 1+\rho, 1+\delta; \frac{a^2}{p^2}, \frac{b^2}{p^2}\right)$$

$= \phi(p)$, $R(\rho+\delta+\nu+\sigma+l) > \frac{3}{2}$, $R(\sigma+l) < 4$, $a, b, p>0$, तथा $p>a+b$

प्रमेय (1) का व्यवहार करने पर

$$\int_0^\infty t^{1/2-l-\rho-\delta-\sigma} G_{22}^{01}\left(\frac{t^2}{p^2}\middle| \begin{matrix} 1-\frac{1}{2}\nu, \ 1+\frac{1}{2}\nu \\ (2\sigma+2\lambda+1)/4, \ (2\sigma-2\lambda+1)/4 \end{matrix}\right)$$

$$\times F_4\left(\frac{l+\rho+\delta+\lambda}{2}, \frac{l+\rho+\delta-\lambda}{2}; 1+\rho, 1+\delta; \frac{-a^2}{t^2}, \frac{-b^2}{t^2}\right)dt$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{\rho+\delta+\nu+\sigma+l}{2}-\frac{3}{4}\right)F_4\left(\frac{\rho+\delta-\nu+\sigma+l}{2}-\frac{3}{4}, \frac{\rho+\delta+\nu+\sigma+l}{2}-\frac{3}{4}; 1+\rho, 1+\delta; \frac{a^2}{p^2}, \frac{b^2}{p^2}\right)}{2p^{\rho+\delta+\sigma+l-9/2}\Gamma\left(\frac{7}{4}-\frac{\rho+\delta+\sigma+l-\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{l+\rho+\delta+\lambda}{2}\right)\Gamma\left(\frac{l+\rho+\delta-\lambda}{2}\right)}$$

यदि $R(l+\rho+\delta+\sigma+\nu)>3/2, \quad a, \ b, p>0.$ (2.4)

3. प्रमेय 2. यदि $\Psi(p)\frac{K}{\lambda}f(t)$ तथा $\phi(p)\frac{\Upsilon}{\mu} t^{\sigma-3/2}f(t)$

तो $$\phi(p)=\pi^{\frac{1}{2}}2^\sigma p^{3/2}\int_0^\infty t^{-\sigma-1}$$

$$\times G_{33}^{02}\left(\frac{t^2}{p^2}\middle| \begin{matrix} 1+\frac{1}{2}\mu, \ 1-\frac{1}{2}\mu, \ \frac{3}{2}+\frac{1}{2}\mu \\ \frac{3}{2}+\frac{1}{2}\mu, \ (2\sigma+2\lambda+1)/4, \ (2\sigma-2\lambda+1)/4 \end{matrix}\right)\psi(t)\, dt \qquad (2.5)$$

यदि समाकल अभिसारी हो तथा $|f(t)|$ का माइजर परिवर्त तथा $|t^{\sigma-3/2}|$ का γ-परिवर्त विद्यमान हो तथा $p>0$

उपपत्ति— $\because \ \psi(p)\frac{K}{\lambda}f(t)$

तथा [2, p. 49]

$$t^{-\sigma}G_{33}^{02}\left(\frac{t}{c^2}\middle| \begin{matrix} 1+\frac{1}{2}\mu, \ 1-\frac{1}{2}\mu, \ \frac{3}{2}+\frac{1}{2}\mu \\ \frac{3}{2}+\frac{1}{2}\mu, \ (2\sigma+2\lambda+1)/4, \ (2\sigma-2\lambda+1)/4 \end{matrix}\right)$$

$$\frac{K}{\lambda} \ \frac{p^\sigma}{\pi^{1/2}2^\sigma} G_{13}^{20}\left(\frac{c^2p^2}{4}\middle| \begin{matrix} -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mu \\ -\frac{1}{2}\mu, \ \frac{1}{2}\mu, \ -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mu \end{matrix}\right)$$

$$=\frac{p^\sigma}{\pi^{1/2}2^\sigma}\Upsilon_\mu(cp)$$

$$=\phi(p), \ R(\pm\lambda+\tfrac{3}{2}-\sigma)>0, \ R(p)>0, \ c>0$$

(2.2) में इन सम्बन्धों उपयोग करने पर

$$\int_0^\infty t^{\sigma-1} \Upsilon_\mu(ct) f(t)\, dt$$

$$= \pi^{1/2} 2^\sigma \int_0^\infty t^{-\sigma-1} G_{33}^{02}\left(\frac{t^2}{c^2}\middle| \begin{matrix} 1+\frac{1}{2}\mu,\ 1-\frac{1}{2}\mu,\ \frac{3}{2}+\frac{1}{2}\mu \\ \frac{3}{2}+\frac{1}{2}\mu,\ (2\sigma+2\lambda+1)/4,\ (2\sigma-2\lambda+1)/4 \end{matrix}\right) \psi(t)\, dt$$

प्राप्त होगा। अब c को p द्वारा प्रतिस्थापित करके तथा (1.3) सम्बन्ध का उपयोग करते हुये हमें (2.5) की प्राप्ति होगी।

$\lambda = \pm\frac{1}{2}$ रखने पर प्रमेय का रूप निम्नांकित प्रकार होगा :

उपप्रमेय 2.

यदि $\psi(p) \doteq f(t)$ तथा $\phi(p) \underset{\mu}{\overset{\Upsilon}{=}} t^{p-1} f(t)$

तो $\phi(p) = \pi^{1/2} 2^{p+1/2} p^{3/2} \int_0^\infty t^{-p-3/2} G_{33}^{02}\left(\frac{t^2}{p^2}\middle| \begin{matrix} 1+\frac{1}{2}\mu,\ 1-\frac{1}{2}\mu,\ \frac{3}{2}+\frac{1}{2}\mu \\ \frac{3}{2}+\frac{1}{2}\mu,\ \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\rho,\ \frac{3}{4}+\frac{1}{2}\rho \end{matrix}\right) \psi(t)\, dt$

यदि समाकल अभिसारी हो तथा $|f(t)|$ का लैपलास परिवर्त एवं $|t^{p-1} f(t)|$ का γ-परिवर्त विद्यमान हो तथा $p>0$.

उदाहरण 2. उदाहरण (1) की भाँति $f(t)$ को लेने पर हमें $\psi(p)$ की प्राप्ति होगी। तब [3] हमें मिलेगा

$$t^{\sigma-3/2} f(t) = t^{\sigma+l-3} J_\rho(at) J_\delta(bt)$$

$$\underset{\mu}{\overset{\Upsilon}{=}} 2^{\sigma+l-5/2} a^\rho b^{3/2-\sigma-l-\rho} p^{3/2} [\Gamma(1+\rho)]^{-1}$$

$$\times \left[\frac{\Gamma(\mu)\Gamma\{\frac{1}{2}(\sigma+l+\delta+\rho-\mu-\frac{3}{2})\} p^{-\mu}}{\Gamma(-\frac{1}{2})\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma\{\frac{1}{4}(-\sigma-l+\delta-\rho+\mu+\frac{7}{2})\} b^{-\mu}} \right.$$

$$\times F_4\left(\frac{\sigma+l+\delta+\rho-\mu-\frac{3}{2}}{2},\ \frac{\sigma+l-\delta+\rho-\mu-\frac{3}{2}}{2};\ 1+\rho,\ 1-\mu;\ \frac{a^2}{b^2},\ \frac{p^2}{b^2} \right)$$

$$+ \frac{\Gamma(-\mu)\Gamma\{\frac{1}{2}(\sigma+l+\delta+\rho+\mu-\frac{3}{2})\} p^\mu}{\Gamma(\frac{3}{2}+\mu)\Gamma\{\frac{1}{2}(\frac{7}{2}-\sigma-l+\delta-\rho-\mu)\}\Gamma\{-\frac{1}{2}(1+\mu)\} b^\mu}$$

$$\left. \times F_4\left(\frac{\sigma+l+\delta+\rho+\mu-\frac{3}{2}}{2},\ \frac{\sigma+l-\delta+\rho+\mu-\frac{3}{2}}{2};\ 1+\rho,\ 1+\mu;\ \frac{a^2}{b^2},\ \frac{p^2}{b^2} \right) \right]$$

$$= \phi(p),\ R(\sigma+l+\delta+\rho-3/2\pm\mu)>0,\quad R(\sigma+l-4)<0,\quad b>a>0,\ p>0$$

प्रमेय का व्यवहार करने पर

$$\int_0^\infty t^{-\sigma-l-\rho-\delta+1/2}\, G_{32}^{02}\left(\frac{t^2}{p^2}\middle| \begin{matrix} 1+\frac{1}{2}\mu,\ 1-\frac{1}{2}\mu,\ \frac{3}{2}+\frac{1}{2}\mu \\ \frac{3}{2}+\frac{1}{2}\mu,\ (2\sigma+2\lambda+1)/4,\ (2\sigma-2\lambda+1)/4 \end{matrix}\right)$$

$$\times F_4\left(\frac{l+\rho+\delta-\lambda}{2},\ \frac{l+\rho+\delta+\lambda}{2};\ 1+\rho,\ 1+\delta;\ \frac{-a^2}{t^2},\ \frac{-b^2}{t^2}\right) dt$$

$$=\frac{b^{3/2-\sigma-l-\rho-\delta}\,\Gamma(1+\delta)}{2\Gamma\{\frac{1}{2}(l+\rho+\delta-\lambda)\}\Gamma\{\frac{1}{2}(l+\rho+\delta+\lambda)\}}$$

$$\times\left[\frac{\Gamma(\mu)\Gamma\{\frac{1}{2}(\sigma+l+\delta+\rho-\mu-\frac{3}{2})\}p^{-\mu}}{\Gamma(-\frac{1}{2})\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma\{-\frac{1}{4}(\sigma+l-\delta+\rho-\mu+\frac{7}{2})\}p^{-\mu}}\right.$$

$$\times F_4\left(\frac{\sigma+l+\delta+\rho-\mu-\frac{3}{2}}{2},\ \frac{\sigma+l-\delta+\rho-\mu-\frac{3}{2}}{2};\ 1+\rho,\ 1-\mu;\ \frac{a^2}{b^2},\ \frac{p^2}{b^2}\right)$$

$$\left.+\frac{\Gamma(-\mu)\Gamma\{\frac{1}{2}(\sigma+l+\delta+\rho+\mu-\frac{3}{2})\}p^{\mu}}{\Gamma(\frac{3}{2}+\mu)\Gamma\{\frac{7}{2}-\sigma-l+\delta-\rho-\mu)\}\Gamma\{-\frac{1}{2}(1+\mu)\}b^{\mu}}\right]$$

यदि $\quad R(\sigma+l+\delta+\rho-\mu)>\frac{3}{2},\ R(\sigma+l+\delta+\rho+\mu)>\frac{3}{2},\ a,\ b,\ p>0.$

4. प्रमेय 3. यदि $\quad \Psi(p)\frac{K}{\lambda}f(t)$

तथा
$$\phi(p)\frac{H}{\nu}\,t^{\sigma-3/2}f(t) \tag{2.6}$$

तो $\quad \phi(p)=\pi^{1/2}2^{\sigma}p^{3/2}\int_0^\infty t^{-\sigma-1}$

$$\times\ G_{32}^{11}\left(\frac{t^2}{p^2}\middle| \begin{matrix} \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu,\ 1+\frac{1}{2}\nu,\ 1-\frac{1}{2}\nu \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu,\ (2\sigma+2\lambda+1)/4,\ (2\sigma-2\lambda+1)/4 \end{matrix}\right)\psi(t)\,dt$$

यदि समाकल अभिसारी हो तथा $|f(t)|$ का माइजर परिवर्त तथा $|t^{\sigma-3/2}f(t)|$ का H-परिवर्त विद्यमान हो और $p>0$.

उपपत्ति— चूँकि $\quad \psi(p)\frac{K}{\lambda}f(t)$

तथा [2, p. 49]

$$t^{-\sigma}G_{33}^{11}\left(\frac{t^2}{c^2}\middle|\begin{matrix}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu,\ 1+\frac{1}{2}\nu,\ 1-\frac{1}{2}\nu\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu,\ (2\sigma+2\lambda+1)/4,\ (2\sigma-2\lambda+1)/4\end{matrix}\right)$$

$$\frac{K}{\lambda}\frac{p^{\sigma}}{\pi^{1/2}2^{\sigma}}G_{13}^{11}\left(\frac{c^2p^2}{4}\middle|\begin{matrix}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\nu\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\nu,\ -\frac{1}{2}\nu,\ \frac{1}{2}\nu\end{matrix}\right)$$

$$=\frac{p^{\sigma}}{\pi^{1/2}2^{\sigma}}H_{\nu}(cp)$$

$$=\phi(p),\quad R(\tfrac{5}{2}-\nu\pm\lambda-\sigma)>0,\quad R(p)>0,\quad c>0$$

(2·2) में इन सम्बन्धों के उपयोग करने पर

$$\int_0^{\infty}t^{\sigma-1}H_{\nu}(ct)f(t)dt=\pi^{1/2}2^{\sigma}\int_0^{\infty}t^{-\sigma-1}\cdot$$

$$\times G_{33}^{11}\left(\frac{t^2}{c^2}\middle|\begin{matrix}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu,\ 1+\frac{1}{2}\nu,\ 1-\frac{1}{2}\nu\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu,\ (2\sigma+2\lambda+1)/4,\ (2\sigma-2\lambda+1)/4\end{matrix}\right)\psi(t)\,dt$$

c को p द्वारा प्रतिस्थापित करके तथा (1·4) सम्बन्ध का उपयोग करके (2·6) को प्राप्त कर सकते हैं।

$\lambda=\pm\frac{1}{2}$ रखने पर प्रमेय का रूप निम्नांकित हो जाता है :

उपप्रमेय 3. यदि $\psi(p)\doteq f(t)$ तथा $\phi(p)\underset{\mu}{\overset{H}{=}}t^{p-1}f(t)$

तो. $$\phi(p)=\pi^{1/2}2^{p+1/2}p^{3/2}\int_0^{\infty}t^{-p-3/2}\,G_{33}^{11}\left(\frac{t^2}{p^2}\middle|\begin{matrix}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mu,\ 1+\frac{1}{2}\mu,\ 1-\frac{1}{2}\mu\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mu,\ \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\rho,\ \frac{3}{4}+\frac{1}{2}\rho\end{matrix}\right)\psi(t)\,dt$$

यदि समाकल अभिसारी हो तथा $|f(t)|$ का लैपलास परिवर्त तथा $|t^{p-1}f(t)|$ का H-परिवर्त विद्यमान हो तथा $p>0$.

उदाहरण 3. उदाहरण [1] की ही भाँति $f(t)$ लेने पर हमें $\psi(p)$ मिलेगा। तब हमें [3] प्राप्त होगा।

$$t^{\sigma-3/2}f(t)=t^{\sigma+l-3}J_{\rho}(at)J_{\delta}(bt)$$

$$\underset{\nu}{\overset{H}{=}}\frac{2^{\sigma+l-3/2}p^{5/2+\nu}}{\pi^{1/2}\Gamma(\frac{3}{2}+\nu)\Gamma\{\frac{1}{2}(\sigma+l-\delta+\rho+\nu-\frac{1}{2})\}\Gamma\{\frac{1}{2}(\frac{5}{2}-\nu-\sigma-l-\rho+\delta)\}}$$

$$\times\sum_{r=0}^{\infty}\frac{a^{\rho+2r}\Gamma\{\frac{1}{2}(\sigma+l+\delta+\rho+\nu-\frac{1}{2}+2r)\}\Gamma\{\frac{1}{2}(\nu+\sigma+l-\delta+\rho-\frac{1}{2}+2r)\}}{(r)!\,\Gamma(1+\rho+r)b^{\sigma+l+\rho+\nu-1/2+2r}}$$

$$\times{}_3F_2\left(\frac{\sigma+l+\delta+\rho+\nu-\frac{1}{2}+2r}{4},\frac{\sigma+l-\delta+\rho+\nu-\frac{1}{2}+2r}{4},1;\frac{3}{2},\frac{3}{2}+\sigma;\frac{p^2}{b^2}\right)$$

$$=\phi(p),\ R(\sigma+l)<4,\ R(\sigma+l+\nu)<\tfrac{9}{2},\ R(\sigma+l+\delta+\rho+\nu)>\tfrac{1}{2},$$

$$b>a>0,\ p>0.$$

प्रमेय (3) का उपयोग करने पर

$$\int_0^\infty t^{1/2-\sigma-l-\rho-\delta}\, G_{33}^{11}\left(\frac{t^2}{p^2}\middle|\begin{matrix}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu,\ 1+\frac{1}{2}\nu,\ 1-\frac{1}{2}\nu\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu,\ (2\sigma+2\lambda+1)/4,\ (2\sigma-2\lambda+1)/4\end{matrix}\right)$$

$$\times F_4\left(\frac{l+\rho+\delta-\lambda}{2},\ \frac{l+\rho+\delta+\lambda}{2};\ 1+\rho,\ 1+\delta;\ -\frac{a^2}{t^2},\ -\frac{b^2}{t^2}\right)dt$$

$$=\frac{p^{\nu+1}\Gamma(1+\rho)\Gamma(1+\delta)}{\pi^{1/2}a^\rho b^\delta\Gamma\{\frac{1}{2}(l+\rho+\delta\pm\lambda)\}\Gamma(\frac{3}{2}+\nu)\ \Gamma\{\frac{1}{2}(\sigma+l-\delta+\rho+\nu-\frac{1}{2})\ \Gamma\{\frac{1}{2}(\frac{5}{2}-\nu-\sigma-l+\delta-\rho)\}}$$

$$\times\sum_{r=0}^\infty\frac{a^{\rho+2r}\Gamma\{\frac{1}{2}(\sigma+l+\delta+\rho+\nu-\frac{1}{2}+2r)\}\Gamma\{\frac{1}{2}(\nu+\sigma+l-\delta+\rho-\frac{1}{2}+2r)\}}{(r)!\ \Gamma(1+\rho+r)b^{\sigma+l+\rho+\nu+2r-1/2}}$$

$$\times{}_3F_2\left(\frac{\sigma+l+\delta+\rho+\nu-\frac{1}{2}}{2}+r,\ \frac{\sigma+l-\delta+\rho+\nu-\frac{1}{2}}{2}+r,\ 1\ ;\ \tfrac{3}{2},\ \tfrac{3}{2}+\sigma\ ;\ \frac{p^2}{b^2}\right)$$

यदि $R(\sigma+l+\rho+\delta+\nu)>\frac{1}{2},\ a,\ b,\ p>0$

निर्देश

1. बैली, डब्लू० एन० । प्रोसी० लन्दन मैथ० सोसा०, 1935, 4 , 37-48.
2. गुप्ता, के० सी० । सेमी० मैथ० द बार्सेलोना, 1964, **16**, 45-54.
3. मल्लू, एच० बी० । पी-एच० डी० थीसिस, जोधपुर विश्वविद्यालय, 1966.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 11, No. 3, July 1968, Pages 137--141

मृदा-निलम्बन में नाइट्राइट आक्सीकरण पर कार्बनिक पदार्थों का प्रभाव

सन्त प्रसाद टंडन तथा मनमोहन मिश्र
रसायन विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

[प्राप्त--मई 16, 1967]

सारांश

नाइट्रोबैक्टर एजिलिस द्वारा मृदा-निलम्बन में नाइट्राइट के आक्सीकरण पर ग्लुकोस, लैक्टोस, मैनिटॉल तथा सार्बिटाल के प्रभाव का अध्ययन किया गया। यह देखा गया कि नाइट्रोबैक्टर नाइट्राइट आक्सीकरण की गति को ग्लुकोस तथा लैक्टोस की उपयुक्त मात्रा पर वर्धित करते हैं किन्तु वे स्वयं इनका उपभोग नहीं करते। मैनिटाल तथा सार्बिटाल का भी प्रभाव ऐसा ही होता है किन्तु यदि नाइट्रोबैक्टर को नाइट्राइट की अनुपस्थिति में इन ऐल्कोहलों के सम्पर्क में रखा जाता है तो वे सक्रियित हो उठते हैं।

Abstract

Effect of organic substances on the oxidation of nitrite in soil suspension. *By* S. P. Tandon and M. M. Misra, Department of Chemistry, University of Allahabad.

The effect of glucose, lactose, mannitol and sorbitol on nitrite oxidation in soil suspension by *nitrobacter agilis* has been studied. It has been found that glucose and lactose enhance the rate of oxidation of nitrite when present in optimum amount. The bacterium is not found to utilize these sugars as the source of energy. The alcohols—mannitol and sorbitol also increase nitrite oxidation but if the bacterium is kept in contact with optimum concentration of alcohols in absence of nitrite for a small period of time it gets activated.

नाइट्रीकरण पर कार्बनिक पदार्थों के प्रभाव का अध्ययन अनेक कार्यकर्ताओं द्वारा किया गया है किन्तु केवल संश्लिष्ट द्रव माध्यम में नाइट्रीकारक जीवाणु मिट्टी में बहुतायत से पाये जाते हैं। मिट्टी की संरचना अत्यन्त जटिल है अतः यह सोचना युक्तियुक्त होगा कि मिट्टी युक्त माध्यम में नाइट्रीकरण पर कार्बनिक पदार्थों का प्रभाव कुछ भिन्न हो। हमने मृदा-निलम्बन में नाइट्रोबैक्टर एजिलिस द्वारा नाइट्राइट आक्सीकरण पर कार्बनिक पदार्थों के प्रभाव का विस्तार से अध्ययन किया है। कार्बनिक

पदार्थों में दो शर्कराओं—ग्लुकोस तथा लैक्टोस एवं दो ऐल्कोहलों—मैनिटाल तथा सार्बिटाल का प्रयोग किया गया है।

प्रयोगात्मक

निम्नांकित विलयन तैयार किये गये :—**विलयन क**— प्रति मिलीलीटर 1 मिलीग्राम नाइट्रोजन वाला सोडियम नाइट्राइट का निर्बीजित विलयन।

विस्तृत अध्ययन के लिये ग्यारह 250 मिली० वाले फ्लास्कों के सोलह सेट (समुच्चय) लिये गये। प्रत्येक फ्लास्क में 3·0 ग्राम मिट्टी, 0·05 ग्राम $CaCO_3$ तथा 50 मिली० आसुत जल लिया गया। ये मात्रायें पहले से प्रयोगों द्वारा निर्धारित की जा चुकी थीं। समस्त फ्लास्कों को वैद्युत ऑटोक्लेब में 15 मिनट तक 15 पौंड दाब पर निर्बीजित किया गया। ठण्डा करने के पश्चात् प्रत्येक सेट के 10 फ्लास्कों में क्रमश: 5, 10, 20, 35, 50, 75, 100, 200, 500, तथा 1000 मिग्रा० ग्लुकोस, लैक्टोस, मैनिटाल अथवा सार्बिटाल डाल दिया गया। ग्यारहवें फ्लास्क में ग्लुकोस अथवा लैक्टोस आदि नहीं मिलाया गया।

अब प्रत्येक फ्लास्क में विलयन-क का 0·2 मिली० मिलाया गया और नाइट्रोबैक्टर एजिलिस के विशुद्ध संवर्ध में से प्रत्येक में 0.1 मिली० इनाकुलम डाल दिया गया। फिर फ्लास्कों को उद्भवन (incubation) के लिये रख दिया गया।

विभिन्न सेटों में से 5 को नाइट्राइट की मात्रा निश्चत करने, अन्य 5 को नाइट्राइट तथा नाइट्रेट की मात्रा ज्ञात करने और शेष 6 को कार्बनिक पदार्थों की मात्रा ज्ञात करने के लिये प्रयुक्त किया गया। ये निश्चयन 48, 96, 168, तथा 240 घंटों के पश्चात् किये गये। प्रारम्भ में भी कार्बनिक पदार्थों का निश्चयन किया गया।

नाइट्राइट की अनुपस्थिति में नाइट्रोबैक्टर एजिलिस पर कार्बनिक पदार्थों का प्रभाव ज्ञात करने की दृष्टि से बिना नाइट्राइट के उपर्युक्त प्रकार के पाँच सेटों की योजना की गई। 48, 96, 168, 240 तथा 360 घंटों के पश्चात् विलयन में कार्बनिक पदार्थों की मात्रायें ज्ञात की गई और इस बार 1 मिली० इनाकुलम को ऐसे फ्लास्कों में प्रविष्ट किया गया जिनमें कार्बनिक पदार्थ नहीं था। फिर 72 घंटों के बाद फ्लास्कों में नाइट्राइट की मात्रा ज्ञात की गई।

नाइट्राइट का निश्चयन ग्रीस-इलोसोवे विधि[1] द्वारा, नाइट्राइट तथा नाइट्रेट का निश्चयन ब्रूसीन विधि[2] द्वारा तथा ग्लुकोस का निश्चयन आयडोमिति[3] द्वारा किया गया।

प्रयुक्त मिट्टी की प्रतिशत रासायनिक संरचना निम्न प्रकार थी :

SiO_2 84·25 प्रतिशत, R_2O_3 8·6 प्रतिशत, P_2O_5 0·056 प्रतिशत, CaO 0·47 प्रतिशत, Mn 0·04 प्रतिशत, कार्बन 0·92, पूर्ण नाइट्रोजन 0.098 प्रतिशत, अमोनियकीय नाइट्रोजन 0·00548 प्रतिशत, नाइट्राइट नाइट्रोजन 0·000236 प्रतिशत, तथा नाइट्रेट नाइट्रोजन 0·00493 प्रतिशत।

परिणाम तथा विवेचना

प्राप्त परिणाम सारणी 1-4 में अंकित हैं।

सारणी 1 नाइट्राइट के आक्सीकरण पर ग्लुकोस का प्रभाव

ग्लुकोस की प्रयुक्त मात्रा (मिग्रा०)	नाइट्राइट नाइट्रोजन की अवशिष्ट मात्रा (मिग्रा०)				
	समय, घंटों में				
	48	96	168	240	360
नियन्त्रित प्रयोग	0.163350	0.078408	0.017424	...	...
5.00	0.163350	0.069696	...	...	...
10.00	0.157900	0.059895	...	...	...
20.00	0.148830	0.049368	...	...	...
35.00	0.132495	0.031280	...	...	...
50.00	0.125235	...	...	...	...
75.00	0.110715	...	...	...	...
100.00	0.107085	...	...	...	...
200.00	0.076230	...	...	...	...
500.00	0.134300	0.055176	...	...	...
1000.00	0.148830	0.087846	0.023684	...	...

सारणी 2 ग्लुकोस के सम्पर्क में रखे बैक्टीरियम द्वारा नाइट्राइट का आक्सीकरण

ग्लुकोस की मात्रा जिसके सम्पर्क में बैक्टीरियम रहा (मिग्रा०)	72 घंटों के पश्चात् नाइट्राइट नाइट्रोजन की अवशिष्ट मात्रा (मिग्रा०)				
	ग्लुकोस के सम्पर्क में बैक्टीरियम के रहने की अवधि (घंटों में)				
	48	96	168	240	360
नियन्त्रित प्रयोग	0.069895	0.085305	0.096195	0.114400	0.141570
5.00	0.063888	0.103455	0.125235	0.132495	0.145200
10.00	0.070110	0.118338	0.134300	0.141570	0.148830
20.00	0.085305	0.125235	0.150654	1.157900	0.170610
35.00	0.095106	0.132495	0.157905	0.200000	0.200000
50.00	0.114400	0.148830	0.166980	0.200000	0.200000
75.00	0.125235	0.161434	0.174240	0.200000	0.200000
100.00	0.132495	0.200000	0.200000	0.200000	0.200000
200.00	0.137900	0.200000	0.200000	0.200000	0.200000
500.00	0.156090	0.200000	0.200000	0.200000	0.200000
1000.00	0.200000	0.200000	0.200000	0.200000	0.200000

सारणी 3 नाइट्राइट के ऑक्सीकरण पर मैनिटाल का प्रभाव

मैनिटाल की प्रयुक्त मात्रा [मिग्रा०]	नाइट्राइट नाइट्रोजन की अवशिष्ट मात्रा (मिग्रा०) समय, घंटों में				
	48	96	168	240	360
नियन्त्रित प्रयोग	0.168795	0.078408	0.004719	...	...
5.00	0.152460	0.064620	...	...	...
10.00	0.148830	0.031950	...	...	...
20.00	0.145200	0.017424	...	...	...
35.00	0.137658	0.011610	...	...	...
50.00	0.126235	0.006534	...	...	...
75.00	0.124835	0.002904	...	...	...
100.00	0.120400	...	...	...	...
200.00	0.100200	...	...	...	...
500.00	0.074415	...	...	...	...
1000.00	0.052998	...	...	...	...
2000.00	0.148830	0.060984	...	...	...
5000.00	0.192390	0.188760	0.185130	0.185130	0.185130

सारणी 4 मैनिटाल के सम्पर्क में रखे बैक्टीरियम द्वारा नाइट्राइट का ऑक्सीकरण

मैनिटाल की मात्रा जिसके सम्पर्क में बैक्टीरियम रहा [मिग्रा०]	72 घंटों के पश्चात् नाइट्राइट नाइट्रोजन की अवशिष्ट मात्रा [मिग्रा०] मैनीटाल के सम्पर्क में बैक्टीरियम के रहने की अवधि				
	48	96	168	240	360
नियन्त्रित प्रयोग	0.074415	0.096195	0.125235	0.145200	0.166480
5.00	0.076950	0.102366	0. 41570	0.156100	0.177870
10.00	0.082750	0.114345	0.132495	0.177870	0.200000
20.00	0.095106	0.1379700	0.172425	0.200000	0.200000
35.00	0.079335	0.125235	0.157900	0.185100	0.200000
50.00	0.073542	0.089338	0.107085	0.125235	0.132500
75.00	0.063888	0.073524	0.089398	0.0933420	0.095106
100.00	0.041335	0.063888	0.069690	0.076950	0.073342
200.00	0.075938	0.081230	0.084750	0.088940	0.095136
500.00	0.102366	0.092040	0.074950	0.057658	0.047920
1000.00	0.125235	0.095136	0.073342	0.052998	0.035020
2000.00	0.132870	0.128800	0.117800	0.139700	0.145200
5000.00	0.188760	0.200000	0.200000	0.200000	0.200000

सारणी 1 तथा 3 से यह स्पष्ट है कि मृदा-निलम्बन में प्रति 50 मिली० में केवल 5 मिग्रा० ग्लुकोस या मैनिटाल की उपस्थिति के कारण नाइट्राइट आक्सीकरण की गति बढ़ जाती है। ज्यों ज्यों इन कार्बनिक पदार्थों की मात्रा बढ़ाई जाती है, त्यों त्यों नाइट्राइट आक्सीकरण की गति में भी वृद्धि होती है। यह गति इन पदार्थों की निश्चित मात्रा पर अधिकतम देखी जाती है। ग्लुकोस के साथ यह मात्रा 200 मिग्रा० और मैनिटाल के साथ 1000 मिग्रा० प्रति 50 मिली० है। यद्यपि इसके आगे भी नाइट्राइट आक्सीकरण पर्याप्त गति से अग्रसर होता रहता है किन्तु 500 मिग्रा० ग्लुकोस तथा 5000 मिग्रा० मैनिटाल द्वारा नाइट्राइट आक्सीकरण पूर्णतया स्थगित हो जाता है।

मृदा-निलम्बन में समय समय पर ग्लुकोस तथा मैनिटाल की मात्रायें ज्ञात की गईं। यह देखा गया कि इनकी मात्राओं में कोई अन्तर नहीं आता जिससे यह सिद्ध होता है कि कार्बनिक पदार्थों का प्रभाव केवल उत्प्रेरकीय है।

यह निश्चित करने के लिये कि बैक्टीरिया ग्लुकोस का उपयोग करते हैं या नहीं, नाइट्राइट से रहित मृदा-निलम्बन में जिसमें कार्बनिक पदार्थ डाले गये, कार्बनिक पदार्थों की सान्द्रतायें ज्ञात की गईं। यह देखा गया कि बैक्टीरिया ग्लुकोस या मैनिटाल का किंचिन्मात्र भी उपयोग ऊर्जा-स्रोत के रूप में नहीं करता।

यदि ग्लुकोस के सम्पर्क में रहने वाले इनाकुलम को निकालकर मृदा-निलम्बन में जिसमें नाइट्राइट हो किन्तु ग्लुकोस न रहे, डाल दिया जाय तो यह देखा जाता है कि अधिक ग्लुकोस के सम्पर्क में रहने वाले बैक्टीरिया द्वारा नाइट्राइट-आक्सीकरण में ह्रास होता है। इसी प्रकार के परिणाम लैक्टोस के साथ भी प्राप्त हुये किन्तु मैनिटाल के सम्पर्क में रहने वाले बैक्टीरिया के द्वारा सर्वथा विपरीत परिणाम प्राप्त हुये। इसके द्वारा नाइट्राइट आक्सीकरण में वृद्धि देखी गई। सार्बिटाल भी मैनिटाल की भाँति आचरण करता प्रतीत हुआ।

इन परिणामों से यह निष्कर्ष निकलता है कि कम सान्द्रता पर शर्करायें तथा ऐल्कोहल नाइट्राइट आक्सीकरण को कम वर्द्धित कर पाते हैं किन्तु अधिक सान्द्रता पर वे उसे बाधित करते हैं। ऐसा क्यों होता है इसका वास्तविक कारण ज्ञात नहीं हो सका। न यही ज्ञात हो सका है कि शर्करायें तथा ऐल्कोहल भिन्न-भिन्न आचरण क्यों प्रदर्शित करते हैं।

निर्देश

1. माइकेलजान, जे०। **जर्न० माइक्रोबायो०**, 1950, **4**, 185.

2. फिशर, एफ० एल०, इबर्ट बी० आर० तथा बेकमान, एच० एफ०। **एनालि० केमि०**, 1958, **30**, 1972.

3. कोल्थाफ, आई० एम०, बेल्चर, आर०; स्टेंजर, वी० ए० तथा मैट्सुयामा, जी०। Volumetric Analysis, **भाग III**, 1957.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 11, No. 3, July 1968, Pages 143--148

अम्लीय माध्यम में आयोडाइड आयन तथा हेक्सासायनोफेरेट (III) के मध्य अभिक्रिया की समसंघटन सक्रियण ऊर्जा

बाल कृष्ण तथा हरिशंकर सिंह
रसायन विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

[प्राप्त—नवम्बर 14, 1967]

सारांश

आयोडाइड आयन (0·05 N) तथा हेक्साफेरोसायनेट(III) (0·005 N) के मध्य अभिक्रिया का गतिक अध्ययन किया गया तो आयोडाइड आयन के प्रति अभिक्रिया कोटि इकाई तथा फेरोसायनाइड आयन के प्रति दो ज्ञात हुई। यह देखा गया कि यदि ताप बढ़ाया जाता है तो अभिक्रिया की गति में वृद्धि होती है। समपरावैद्युत सक्रियण ऊर्जा का परिगणन किया गया तो यह देखा गया कि ऐल्कोहल के प्रतिशतत्व में वृद्धि के साथ ही सक्रियण ऊर्जा बढ़ जाती है।

Abstract

Isocomposition activation energy in the reaction between iodide ion and hexacyanoferrate(III) in acid media. *By* B. Krishna and H. S. Singh, Department of Chemistry, University of Allahabad, Allahabad.

In the reaction between iodide ion and hexacyanoferrate(III), the order with respect to iodide ion is unity and with respect to ferricyanide ion is two at 0·05 N and 0·005N concentrations of the reactants. It has been observed that the rate of the reaction increases with the increase of temperature. Isodielectric activation energy has been calculated and it is observed that the activation energy increases with increase in percentage of alcohol.

अभी तक अम्लीय माध्यम में आयोडाइड आयन तथा पोटैशियम फेरीसायनाइड के मध्य अभिक्रिया पर ऐल्कोहल की विभिन्न प्रतिशतताओं के लिये ताप के प्रभाव का अध्ययन नहीं हुआ है। हमने अभिक्रिया की गति का अध्ययन मुक्त हुए आयोडीन को मानक थायोसल्फेट विलयन से स्टार्च को

सूचक रूप में प्रयुक्त करते हुये अनुमापित करके किया है। प्राप्त गतिक आँकडों से ज्ञात होता है कि फेरोसायनाइड के प्रति अभिक्रिया कोटि दो तथा आयोडाइड के प्रति एक है। माध्यम के ताप में वृद्धि करने से अभिक्रिया की गति बढ़ जाती है। सक्रियण ऊर्जा का परिगणन आरहीनियस समीकरण का उपयोग करके किया गया है।

प्रयोगात्मक

प्रयुक्त सामग्री—पोटैशियम फेरीसायनाइड का विलयन विशुद्ध कोटि के पदार्थ को आसुत जल में घोल कर तैयार किया गया।

विशुद्ध पोटैशियम आयोडाइड की निकटतम मात्रा को जल में घोल कर विलयन तैयार किया गया। इस विलयन को मानक सिल्वर नाइट्रेट विलयन के द्वारा इयोसीन[1] को सूचक के रूप में प्रयुक्त करके अनुमापित करके प्रामाणिक बनाया गया।

समस्त प्रयोगों में वैश्लेषिक कोटि का हाइड्रोक्लोरिक अम्ल प्रयुक्त किया गया।

परम एथिल ऐल्कोहल को पुनः आसवित करके 78·2° पर क्वथन करने वाले प्रभाज को एकत्र करके विभिन्न तापों के प्रभाव के अध्ययन के लिये प्रयुक्त किया गया।

अभिक्रिया के अग्रसर होने का अध्ययन

एक शंक्वाकार फ्लास्क में पोटैशियम फेरीसायनाइड की अधिक मात्रा लेकर तापस्थापी में रखा गया। पोटैशियम आयोडाइड, ऐल्कोहल-जल मिश्रण तथा हाइड्रोक्लोरिक अम्ल की आवश्यक मात्राओं को भी एक अन्य फ्लास्क में भर कर उसी तापस्थापी में रखा गया। जब इन विलयनों का ताप, तापस्थापी के ताप के तुल्य हो गया तो पोटैशियम फेरोसायनाइड की वांछित मात्रा को पिपेट द्वारा निकालकर दूसरे फ्लास्क में रखे आयोडाइड-ऐल्कोहल-हाइड्रोक्लोरिक अम्ल विलयन में डाल दिया गया। जब आधा विलयन पिपेट से निकल चुका तो घड़ी को चालू कर दिया गया। अभिक्रिया के अग्रसर होने का अध्ययन करने के लिये ज्ञात आयतन को फ्लास्क में से निकाल कर हिमशीतल जल में डाल दिया गया जिससे अभिक्रिया रुक जाय। मुक्त आयोडीन को मानक थायोसल्फेट विलयन द्वारा अनुमापित किया गया। अन्तिम विन्दु ज्ञात करने के लिये स्टार्च सूचक का व्यवहार किया गया।

प्राप्त परिणाम विभिन्न तापों के लिये सारणियों (1-5) के रूप में प्रस्तुत किये गये हैं।

सारणी 1

ऐल्कोहल की अनुपस्थिति में

$[K_3Fe(CN)_6] = 0.005\ N$
$[KI] = 0.050\ N$ $\mu = 0.18$
$[HCl] = 0.10\ N$

ताप °C	पराविद्युत स्थिरांक D	मानक द्वितीय वर्ग स्थिरांक K_s लिटर ग्राम तुल्य $^{-1}$ मिनट $^{-1}$
30	77.25	2.295
35	76.03	3.334
40	73.38	4.300

सारणी 2

5% ऐल्कोहल

$[K_3Fe(CN)_6] = 0.005\ N$
$[KI] = 0.050\ N$ $\mu = 0.18$
$[HCl] = 0.10\ N$

ताप °C	पराविद्युत स्थिरांक D	मानक द्वितीय वर्ग स्थिरांक K_s लिटर ग्राम तुल्य $^{-1}$ मिनट $^{-1}$
30	75.15	2.061
35	74.15	2.660
40	72.06	4.022

सारणी 3

10% ऐल्कोहल

$[K_3Fe(CN)_6] = 0.005\ N$
$[KI] = 0.05\ N$ $\mu = 0.18$
$[HCl] = 0.10\ N$

ताप °C	पराविद्युत स्थिरांक D	मानक द्वितीय वर्ग स्थिरांक K_s लिटर ग्राम तुल्य $^{-1}$ मिनट $^{-1}$
30	72.83	1.909
35	71.67	2.560
40	69.53	3.728

सारणी 4

15% ऐल्कोहल

$[K_3Fe(CN)_6] = 0.005\ N$

$[KI] = 0.05\ N$ $\mu = 0.18$

$[HCl] = 0.10\ N$

ताप °C	परावैद्युत स्थिरांक D	मानक द्वितीय वर्ग स्थिरांक K_s लिटर ग्राम तुल्य $^{-1}$ मिनट $^{-1}$
30	70.95	1.666
35	69.36	2.283
40	67.16	3.458

सारणी 5

20% ऐल्कोहल

$[K_3Fe(CN)_6] = 0.005\ N$

$[KI] = 0.05\ N$ $\mu = 0.18$

$[HCl] = 0.10\ N$

ताप °C	परावैद्युत स्थिरांक D	मानक द्वितीय वर्ग स्थिरांक K_s लिटर ग्राम तुल्य $^{-1}$ मिनट $^{-1}$
30	68.44	1.489
35	67.32	2.168
40	65.32	3.210

परिणाम तथा विवेचना

माध्यम की दी हुई आयनिक सान्द्रता पर समसंघटन सक्रियण ऊर्जाओं की गणना आरहीनियस समीकरण

$$\log_{10} K_s = \log_{10} A - \frac{E}{2 \cdot 303 RT}$$

को व्यवहृत करते हुये की गई जिसमें E सक्रियण ऊर्जा, A आरहीनियस आवृति गुणक तथा R गैस स्थिरांक को द्योतित करते हैं। $\log_{10}Ks$ को 1/T के विपक्ष में लेखांकित करने पर एक वक्र प्राप्त होता है जिसका ढाल -E/2·303R के तुल्य है। इस ढाल से E का परिगणन किया जा सकता है। दी हुई आयनिक सान्द्रता पर प्राप्त परिणाम सारणी 6 से 10 तक में संग्रहीत हैं।

सारणी 6

विशुद्ध जल में अभिकारक

$\log k_s+3$	$1/T\times10$
1.582	3.300
1.745	3.247
1.855	3.194

सारणी 7

5% ऐल्कोहल में अभिकारक

$\log k_s+3$	$1/T\times10$
1.536	3.300
1.647	3.247
1.826	3.194

सारणी 8

10% ऐल्कोहल में अभिकारक

$\log k_s+3$	$1/T\times10$
1.503	3.300
1.630	3.247
1.786	3.194

सारणी 9

15% ऐल्कोहल में अभिकारक

$\log k_s+3$	$1/T\times10$
1.442	3.300
1.580	3.247
1.760	3.194

सारणी 10

20% ऐल्कोहल में अभिकारक

$\log k_s+3$	$1/T\times10$
1.395	3.300
1.557	3.247
1.728	3.194

माध्यम के विभिन्न संघटनों के लिये प्राप्त सक्रियण ऊर्जा के मान सारणी 11 में अंकित हैं।

सारणी 11

संघटन % ऐल्कोहल	E, कैलारी / ग्राम मोल
0	11,450
5	12,950
10	13,120
15	14,220
20	14,350

उपर्युक्त से यह स्पष्ट हो जाता है कि ऐल्कोहल की सान्द्रता में वृद्धि के साथ ही सक्रियण ऊर्जा में भी वृद्धि होती है।

हमने कुछ दशाओं के लिये समसंघटन तथा समपरावैद्युत सक्रियण ऊर्जाओं के अन्तर की तुलना एमिस तथा होम्स[2] के समीकरण द्वारा प्राप्त अन्तर से की है।

$$\triangle E_{fc} - \triangle E_d = \frac{Z_a Z_b \epsilon^2 NT}{D^2 J}\left[\frac{1}{r} - \frac{3c}{10}\sqrt{\left(\frac{2\pi Nu}{10DKT}\right)}\right]\frac{dD}{dT}$$

जिसमें E अभिकारकों की अनन्त तनुता तथा विलायक के स्थिर संघटन पर सक्रियण ऊर्जा है तथा $\triangle E_d$ अभिकारकों की अनन्त तनुता तथा विलायक के स्थिर परावैद्युत स्थिरांक पर सक्रियण ऊर्जा को व्यक्त करता है। किन्तु हमने यह देखा कि समसंघटन तथा समपरावैद्युत सक्रियण ऊर्जाओं के परिगणित तथा प्रेक्षित अन्तर उपर्युक्त समीकरण से प्राप्त मानों से मेल नहीं खाते। सम्भवतः यह माध्यम की उच्च आयनिक सान्द्रता के कारण है।

निर्देश

1. वोगेल, आई०। A Text book of Quantitative Inorganic Analysis. **लांगमैंस, ग्रीन तथा कम्पनी, लन्दन,** 1962, पृ० 262.
2. एमिस, ई० एस० तथा होम्स, एफ० सी०। **जर्न० अमे० केमि० सोसा०,** 1941, **63**, 223.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 11, No 3. July 1968, Pages 149--159

गुलिका विरचनार्थ एक कार्बनिक बंधक तथा भारतीय लोह अयस्कों में लोह का मात्रात्मक विश्लेषण

सत्येन्द्र नाथ गुप्त तथा धर्मेन्द्र नाथ बिश्नोई

भारतीय भूगर्भ सर्वेक्षण, नागपुर

[प्राप्त--जनवरी 20, 1968]

सारांश

प्रतिष्ठित आर्द्र विधियों द्वारा लोह अयस्कों का मात्रात्मक विश्लेषण अत्यन्त श्रमसाध्य होता है। इस सम्बन्ध में एक्स-किरण स्पेक्ट्रमलेखी प्रविधियों का विशेष महत्व है। इस प्रपत्र में भारतीय लोह अयस्कों पर एक्स-किरणों द्वारा किये गये लोह निश्चयन की समन्वीक्षा, सुतथ्यता तथा विभ्रम स्रोतों के प्रयोग-फल का संक्षेपण किया गया है। प्रादर्श विरचन, न्यादर्श पेषण तथा गुलिका विरचनार्थ दाबों की चर्चा की गई है। इस सम्बन्ध में समरूप गुलिका विरचन की जिस सुद्धृत प्रविधि का विकास तथा प्रमापीकरण किया गया है उसका सविस्तार उल्लेख है।

Abstract

An organic binder for pellet preparation and quantitative analysis of iron in Indian ores by X-ray fluorescence. *By* S. N. Gupta and D. N. Vishnoi, Geological Survey of India, Nagpur.

Quantitative analysis of iron ores by classic wet chemical procedures is a laborious process. Development and application of X-ray spectrographic techniques in this connection is of special interest. This paper summarises the results of test, precision and the sources of errors in X-ray method, as applied to iron determination in Indian iron ores. Specimen preparation, sample grinding and pressures for pellet preparation have been discussed. Improved techniques of homogenous pellet preparation developed and standardised in this connection have also been described in detail.

भूमिका

जब प्रादर्श पर पर्याप्त शक्ति के एक्स-किरण फोटान प्रहार करते हैं तब अपाती विकिरण का प्रकाशवैद्युत अवशोषण तथा विचाराधीन सामग्री के लाक्षणिक प्रतिदीप्त विकिरण का उत्सर्जन होता है। विक्षुब्धकरण की इस विधि का प्रयोग, इसके अनुपघाती आचरण, गति तथा प्रतिदीप्त विकिरण में सातत्य के अभाव के कारण वैश्लेषिक उपकरण के रूप में किया जाता है। सामान्य प्रविधियों तथा एक्स-किरण स्पेक्ट्रममापी विश्लेषण प्रयोगों की चर्चा साहित्य में की गई है।[1]

फिर भी कई कारणों से, जिनका प्रभाव प्रयोग-फल की मान्यता पर पड़ता है तथा जिन पर पृथक थक ध्यान देना होता है इन प्रक्रियायों के सार्वत्रिक उपयोग अभी सीमित ही हैं।

अयस्कों तथा खनिजों[2] के सम्बन्ध में इन प्रक्रियाओं का अभी पूर्णरूपेण प्रमाणीकरण नहीं हुआ है। विभिन्न स्थानों से प्राप्त उसी अयस्क या खनिज में सूक्ष्ममात्रिक संघटकों की मात्रा भिन्न होती है। इन संघटकों की भिन्नता के कारण वैश्लेषिक प्रयोगफल में विचरण देखने में आता है। इसकी गति को ध्यान में रखते हुए भारतीय लोह अयस्कों में लोह के विश्लेषणार्थ इस रीति के प्रमाणीकरण का प्रयास किया गया है।

उपकरण

इस अनुसंधान में फिलिप्स द्वारा निर्मित निम्नलिखित उपकरणों का प्रयोग किया गया है :—

1. स्थायित एक्स-किरण विवर्तन जनित्र। पी० डब्ल्यू० 1010
2. उच्च तीव्रता, तेल विसंवाहित एक्स-किरण नली जिसमें टंगस्टन का लक्ष्य था। सं० 25104
3. विस्तीर्ण गोचर, उच्च तथा निम्न कोण वाला कोणिका-मान (गोनिओमीटर)। पी०डब्ल्यू० 1050
4. इलेक्ट्रानिक परिपथ पट्ट तथा स्वंयचालित अभिलेखी। पी० डब्ल्यू० 1051
5. क्वार्ट्ज क्रिस्टल। पी० डब्ल्यू० 1528
6. स्पेक्ट्रोग्राफ के संलगनी। पी० डब्ल्यू० 1520

संपरीक्षात्मक परिस्थितियाँ

1. जनित्र की वोल्टता तथा धारा, 30 Kv. तथा 16 MA.
2. परावर्तन-कोण—33.68°

3. अनुमात्रा मान का विवरण :—60 सेकण्ड का स्थायी-सामयिक क्रम
4. गाइगर गणक वोल्टता—1650 वोल्ट
5. सञ्चक :—एक इंच के भीतरी व्यास वाला अकलुष इस्पात संचक
6. पीडित्र—हाइड्रालिक पीडित्र

गाइगर ली का निश्चयन

धात्वीय लोह् का न्यादर्श के रूप में प्रयोग कर अनेक गाइगर-प्लेट वोल्टताओं पर गणन संख्या के अवलोकन से 33.68° वाली Fe K_α कोण के प्रतिदीप्त विकिरणों की पहचान की गई तथा अधिकतम व न्यूनतम गणन संख्या देने वाली वोल्टताओं के मध्यमानों को सक्रिय गाइगर वोल्टता के रूप में प्रयोग किया गया है।

न्यादर्श विरचन

न्यादर्श, गुलिका रूप में प्रयोग किये गए हैं। ये अनेक रीतियों[3] द्वारा विरचित किये जा सकते हैं। इनमें से अधिकांश प्रविधियाँ, या तो अपनी जटिलता या इनके द्वारा प्राप्त गुलिकाओं की असमानता के कारण हमारे लिये अनुपयुक्त ही सिद्ध हुई हैं। इस कारण ऐसी विधि प्रयोग करने का प्रयास किया गया है जो सरल हो तथा जिसमें न्यादर्श अथवा बंधक को बिना किसी रसायन तथा तापोपचार के समरूप गुलिका विरचित कर पुनः समान परिणाम प्राप्त हो सके।

अकार्बनिक बंधक प्रायः बिना तापोपचार के अच्छे परिणाम नहीं देते। इस कारण इस अनुसंधान में कार्बनिक बंधकों का ही प्रयोग किया गया है। अनेक कार्बनिक बंधकों में जिनका इस अनुसंधान में प्रयोग किया गया है, यह देखने में आया है कि 'टिपकोलाईट' फीनालीय संचक चूर्ण जिसे बम्बई के टिपको-इण्डस्ट्रियल कारपोरेशन से प्राप्त किया गया है, बहुत अच्छे परिणाम देता है। इससे प्राप्त गुलिका समरूप होती है तथा दीर्घ काल तक अपना रूप भी बनाये रखती है।

बंधक की 0·5 ग्राम मात्रा, न्यादर्शों की 2 ग्राम मात्रा को बाँधने में पर्याप्त होती है। न्यादर्श की उपयुक्त मात्रा, अकेले या तनुकारी गालक (flux) के साथ तोल कर, सर्वप्रथम 35 छिद्र तक विचूर्णित की जाती है। ·5 ग्राम 'टिपकोलाईट' चूर्ण इसमें मिलाकर फिर इसे पन्द्रह मिनट तक चूर्णित लिया जाता है। फिर मिश्रण को सञ्चक में डाल कर हाइड्रालिक पीडित्र से पन्द्रह मिनट तक, 8·5 टन दाब पर सम्पीडित किया जाता है। इससे बहुत अच्छी समरूप तथा दोषरहित गुलिका प्राप्त होती है। सम्पूर्ण अनुसंधान में गुलिका बनाने की इसी रीति का प्रयोग किया गया है।

प्रमापकों की तैयारी

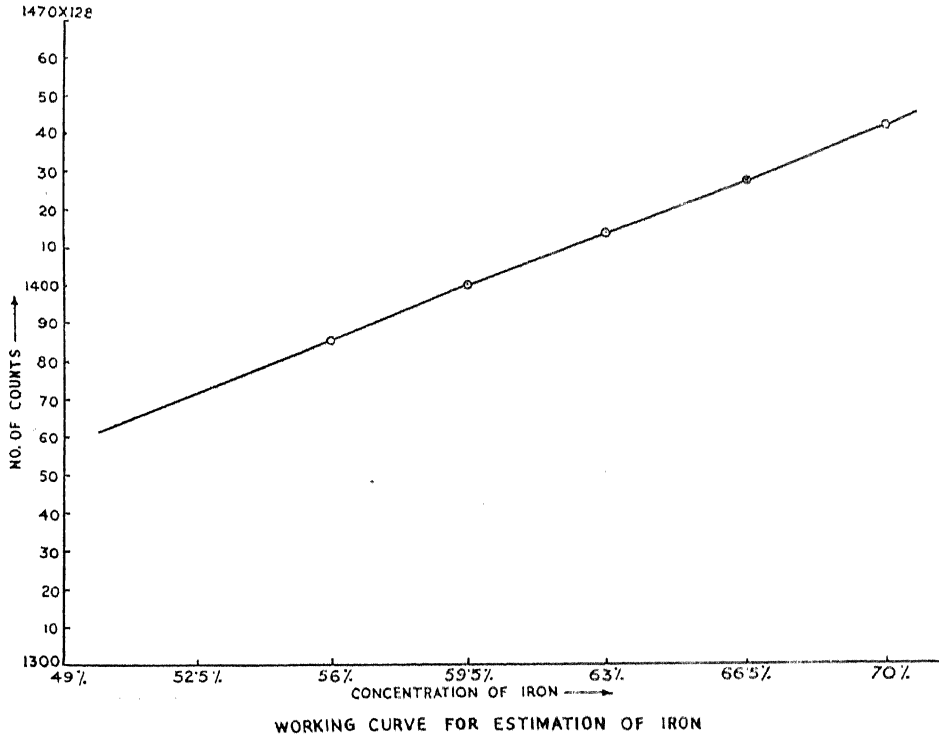
लोह समृद्ध भारतीय लोह अयस्क मुख्यतः हीमैटाइट (Fe_2O_3) तथा अल्प मात्रा में मैग्नेटाइट, (Fe_3O_4) के रूप[4] में पाया जाता है। इनमें लोह मात्रा क्रमशः 70 तथा 72 प्रतिशत होती है। लोह की निम्न मात्रा कुछ भी हो सकती है, जो अयस्क के अन्य तत्वों पर निर्भर करती है। इनके मुख्य संघटक

सिलिका (SiO_2) तथा ऐल्यूमिना (Al_2O_3) होते हैं। तथापि अन्य पदार्थों जैसे, मैंगनीज़, वैनेडियम, टाइटेनियम, गंधक, फास्फ़ोरस आदि के संयोग भी अल्पांश में इनमें पाये जाते हैं।

प्रमाणिक गुलिका रसायन शुद्ध Fe_2O_3 (वैश्लेषिक) कोटि तथा एक उपयुक्त गालक के अवमिश्रण से बनाई गई है। विभिन्न स्थानों से प्राप्त लोह् अयस्कों के प्रतिनिधि न्यादर्शों के संपूर्ण विश्लेषण के आधार[5] पर उपलब्ध जानकारी से विभिन्न स्थानों के लिये भिन्न भिन्न गालक तैयार किये जाते हैं। प्रस्तुत अनुसन्धान में इसी ज्ञान को प्रयोग कर गालक में विभिन्न पदार्थों की सम्बद्ध मात्रा का समाविष्टिकरण किया गया है।

जिन अयस्कों में लोह् की मात्रा 50 प्रतिशत से कम होती है, वे आर्थिक दृष्टि से उपयोगी नहीं होते फलतः 3·5 प्रतिशत के अन्तर पर 50 प्रतिशत से 70 प्रतिशत के विस्तार में ही प्रमाण बनाये गये हैं। लोह् अयस्क, गालक तथा बन्धक की आवश्यक मात्रा प्रत्येक बार इस प्रकार ली गई है कि कुल भार 2·5 ग्राम हो जाय। उपर्युक्त वर्णनानुसार फिर इनको मिलाया, पीसा तथा दबाया गया है।

विधि

प्रमाणिक तथा न्यादर्श गुलिकाओं को स्पेक्ट्रोमापी के न्यादर्श-कक्ष में रख दिया जाता है तथा साठ सेकंड के पूर्व निश्चित समय के लिये प्रत्येक बार सम्पूर्ण गणन संख्या देखी जाती है। कार्य वाहक

चित्र 1. लोह् निश्चयन के लिये कार्यवाहक वक्र

वक्र, X श्रक्ष पर प्रतिशत सान्द्रता तथा y श्रक्ष पर गणन संख्या के प्रांकण से बनाया जाता है जो चित्र 1 में दिखाया गया है। किसी श्रज्ञात न्यादर्श की गुणन-संख्या ज्ञात होने पर कार्यवाहक वक्र द्वारा इसकी प्रतिशत मात्रा तुरन्त निकाली जा सकती है।

परिशुद्धता तथा पुनरुत्पादिता

किसी भी विश्लेषणात्मक निश्चयन में त्रुटि की जानकारी के लिये दो बातों की श्रोर ध्यान देना होता है :

1. वास्तविक मानों की तुलना में श्रभ्यानित की मात्रा तथा दिशा।

2. दिये मान का पुनरुत्पादन।

वास्तविक मान क्या[6] होता है, इस सम्बन्ध में विश्लेषण-शास्त्रियों में सर्वत्र मतभेद रहा है। तथापि प्रतिवलन से, सुतथ्यता की समस्या का संपूर्ण तो नहीं वरन् पर्याप्त समाधान हो जाता है।

शैल संरचना सम्बन्धी श्रनुसंधानों[7] से पता चला है कि किसी भी विश्लेषण की परिशुद्धता (श्रर्थात् वास्तविक श्रर्हा तथा निकटता) निर्धारित करना कठिन होता है। परन्तु इनसे विश्लेषण की सुतथ्यता श्रर्थात् पुनरुत्पादन का प्रर्याप्त श्रनुमान लगाया जा सकता है। प्रयोग से मिले न्यास को विचरण विश्लेषण[8] द्वारा साधित किया जा सकता है। परिशुद्धता प्राक्कलन में कठिनाई होने के कारण यहाँ केवल सुतथ्यता-माप की त्रुटि पर ही ध्यान दिया गया है।

किसी विशेष न्यादर्श की लोह्-मात्रा श्रनेक बार निश्चयन करके मानक विचलन तथा विचलन-गुणांक निम्नलिखित रीति से गणन किया गया है।

$$s = \pm\sqrt{\left(\frac{\Sigma d^2}{n-1}\right)}$$

d प्रत्येक श्रवलोकन का समान्तर मध्यमान से विचलन है तथा n निश्चयन संख्या है।

$$\text{विचरण गुणांक } c = \frac{}{\overline{X}} \times 100$$

यहाँ $\overline{X}$ समान्तर मध्यमान है। ये मान सारणी 1 में दिये गये हैं।

सारणी 1

मध्यमान से विचलन

क्रमांक	मान	मध्यमान से विचलन d	d^2
1.	68.20	+.14	.256
2.	68.75	+.68	.462
3.	68.20	+.14	.256
4.	68.20	+.14	.256
5.	67.60	+.46	.211
6.	67.60	—.46	.211
7.	67.60	—.46	.211
8.	68.20	+.14	.256
9.	68.20	+.14	.256

मध्यमान 68.06

मानक विचलन $s = \pm\sqrt{\left(\frac{\Sigma d^2}{n-1}\right)}$

$= \pm .17$

विचरण गुणांक $= \pm .25\%$

परिणाम तथा विवेचना

इस रीति द्वारा लोह के प्रमाणिक न्यादर्शों में तथा बैलाडिला जिले से प्राप्त हुई कुछ नैत्यक लोह अयस्कों में लोह की मात्रा तथा आर्द्र-रासायनिक विधि द्वारा इन्हीं न्यादर्शों में लोह की मात्रा सारणी 2 में दी गई है।

सारणी 2

लोह की प्रतिशत मात्रा की एक्स-किरण स्पेक्ट्रोलेखी विधि तथा आर्द्र-रासायनिक विधि द्वारा निश्चयन की तुलना

न्यादर्श संख्या	लोह का एक्सकिरण स्पेक्ट्रोलेखी विश्लेषण	लोह का रासायनिक विश्लेषण	अन्तर
1. PHy-1	66.05	65.88	+0.17
2. PHy-2	64.05	64.16	—0.11
3. PHy-3	61.20	60.34	+0.86
4. PHy-4	66.05	66.56	—0.54
5. PHy-5	68.20	68.08	+0.12
6. PHy-6	66.50	65.77	+0.73
7. PHy-7	63.20	62.41	+0.79

सारणी 3 में मैसूर प्रदेश के बेल्लारी जिले के दोनीमलाई स्थान से प्राप्त लोह् अयस्कों में इस विधि द्वारा ज्ञात की गई लोह् की मात्रायें दी गई हैं।

सारणी 3

बेल्लारी जिले (मैसूर प्रदेश) के दोनीमलाई स्थान से प्राप्त लोह् अयस्कों में लोह् की प्रतिशत मात्रा

क्रमांक	न्यादर्श संख्या	लोह्-मात्रा	क्रमांक	न्यादर्श संख्या	लोह्-मात्रा
1.	PHy-10	60.62	22.	PHy-31	61.75
2.	PHy-11	66.75	23.	PHy-32	61.00
3.	PHy-12	60.75	24.	PHy-33	60.62
4.	PHy-13	60.62	25.	PHy-34	65.50
5.	PHy-14	60.25	26.	PHy-35	60.75
6.	PHy-15	62.00	27.	PHy-36	59.50
7.	PHy-16	62.25	28.	PHy-37	62.25
8.	PHy-17	64.75	29.	PHy-38	59.62
9.	PHy-18	60.00	30.	PHy-39	63.00
10.	PHy-19	62.37	31.	PHy-40	63.00
11.	PHy-20	62.50	32.	PHy-41	50% से कम
12.	PHy-21	65.75	33.	PHy-42	65.25
13.	PHy-22	66.25	34.	PHy-43	60.87
14.	PHy-23	68.25	35.	PHy-44	64.37
15.	PHy-24	61.75	36.	PHy-45	67.82
16.	PHy-25	66.50	37.	PHy-46	59.87
17.	PHy-26	65.50	38.	PHy-47	59.00
18.	PHy-27	62.50	39.	PHy-48	63.25
19.	PHy-28	63.82	40.	PHy-49	57.25
20.	PHy-29	61.00	41.	PHy-50	58.00
21.	PHy-30	56.75			

एक्सकिरण स्पेक्ट्रोलेखी विधि द्वारा निश्चयन में निम्नलिखित कारक मूल्यांकन पर प्रभाव डालते हैं :—

(a) गुलिका विरचन में कणाकार तथा प्रयुक्त दाब द्वारा न्यादर्श विरचन की पुनरुत्पादिता।

(b) प्रादर्शों में अन्य संघटकों द्वारा विकिरणों का वर्धन तथा अवशोषण।

(c) उपकरण परिसीमाएँ।

कणाकार द्वारा विषमांगता प्रभाव की जाँच क्लाउसिस,[9] केम्पबेल एवं थैचर,[10] स्मिथसन[11] तथा चोड्स[12] ने की है। इसके अनुसार कणाकार का प्रभाव गहन पेषण द्वारा निरसित किया जा सकता है। हमारे प्रयोग के अनुसार, जैसा कि पहले लिख चुके हैं, न्यादर्श बंधक तथा तनुकारी के लगभग 200 छिद्र तक पन्द्रह मिनट पेषण से पुनरुत्पादिता परिणाम प्राप्त हो जाते हैं।

जिस दाब पर गुलिका बनाई जाती है उसका भी गणन-गति पर प्रभाव[13] पड़ता है, जिसका परिणाम की परिशुद्धता तथा पुनरुत्पादिता पर भी प्रभाव होता है।

गणन गति गुलिका विरचनीय दाब के बढ़ाने से आरंभ में बढ़ती है, तथा फिर स्थिर हो जाती है। यह अवलोकन किया गया है कि पन्द्रह मिनट तक 8·5 टन दाब लगाने से स्थाई परिणाम प्राप्त होते हैं। ये परिस्थितियाँ सम्पूर्ण अनुसंधान में प्रमाप तथा न्यादर्श गुलिका-विरचन में प्रयुक्त की गई हैं।

खनिजों तथा दूसरे अयस्कों में दूसरे तत्व सदैव अनेक मात्रा में पाये जाते हैं जो विकिरण के वर्धन तथा अवशोषण द्वारा वैश्लेषिक फलों को प्रभावित करते हैं। यह दिखाया[14] जा चुका है कि न्यादर्श की मात्रा, नियन्त्रण तथा खनिज न्यादर्श की पतली झिल्ली के रूप में प्रयोग करने से यह प्रभाव न्यूनतम किया जा सकता है। परन्तु उच्चतम परिणाम प्राप्त करने के हेतु यह आवश्यक है कि न्यादर्श तथा मानक (Standard) की रासायनिक रचना एकसी हो। इस कारण मानकों के अनेक कुलक विरचन की आवश्यकता होती है। परन्तु इसे अवशोषण गुणांक तथा आभासी रचना पर आधारित एक संशोधन द्वारा कम किया जा सकता है। किन्तु इन गणनाओं में बहुत समय लगता है तथा इनसे वास्तविक सांद्रता के केवल युक्तियुक्त सन्निकटन का ही निरूपण होता है। इस कारण, रासायनिकतः शुद्ध लोह यौगिकों में, विभिन्न स्थानों से प्राप्त अयस्कों के प्रतिनिधि न्यादर्शों के सम्पूर्ण विश्लेषण द्वारा उपलब्ध सूचना के आधार पर दूसरे तत्वों के ज्ञात सान्द्रता के समामेलन से प्रमाप विरचन का प्रयास किया गया है। हमारे अनुसन्धान में पतली झिल्ली वाली न्यादर्श-विरचन विधि से कोई उत्साहवर्धक परिणाम प्राप्त नहीं हुए।

यद्यपि एक्स-किरण स्पेक्ट्रमलेखी सिद्धान्त पहले से ज्ञात है, परन्तु विश्लेषणात्मक निश्चयन हेतु इसका प्रयोग उपयुक्त उपकरणों की अप्राप्यता के कारण नहीं किया जा सका[15]। इस सम्बन्ध में, अभी हाल में, कठिनाइयाँ अवश्य दूर की गई हैं परन्तु परिणामी मापन फिर भी कुछ नियन्त्रणों द्वारा बाधित ही रहता है। विकिरणों की जनन तथा पहचान प्रणाली का स्थायी किया जाना अतिआवश्यक है, क्योंकि विद्युदणु की स्थायी अवधि परिणाम की सुतथ्यता पर बहुत प्रभाव डालती है। कुछ सीमा के बाद मुख्यतार (mains) वोल्टता के उच्चावचन भी परिणाम पर अपना प्रभाव दिखाते हैं। एक्स-किरण जनित्र के स्थायी होने पर भी देखने में आया है कि धारा में प्रायः $\pm$ 2 MA के उच्चावचन होते हैं जो कभी कभी $\pm$ 5 MA तक चले जाते हैं। यह सर्वथा मुख्यतार के उच्चावचन वोल्टता के कारण ही होता है। इसकी जाँच दो-तीन निश्चयन के पश्चात् सदैव एक प्रमाप न्यादर्श पर पाठ्यांक लेकर की जाती है।

पह्चान करने वाले तंत्र की सुतथ्यता गुणों की संख्या बढ़ाने से सुधारी[16] जा सकती है। इन उपकरणों में उपलम्भन तंत्र से अधिमान द्वारा इसे गणन हेतु, सबसे अधिक उपलब्ध समय का प्रयोग कर प्राप्त किया गया है।

इस विधि द्वारा, तथा रासायनिक विधि द्वारा प्राप्त किये गये लोह् के एक प्रमाप न्यादर्श तथा अन्य न्यादर्शों के मूल्यों की तुलना से पता चलता है कि प्रमाप के मूल्यों में दोनों विधियों में अच्छी समानता है, परन्तु रासायनिक विधि द्वारा नैत्यक रूप से प्राप्त किये गये मूल्यों में $\pm$ 2 प्रतिशत का विचरण पाया जाता है। रासायनिक प्रविधि के प्रयोग से प्रतिदिन प्रति व्यक्ति द्वारा लगभग बीस निश्चयन किये जा सकते हैं जबकि इन प्रविधियों के प्रयोग से प्रतिदिन प्रति व्यक्ति एक सौ से भी अधिक न्यादर्शों का निश्चयन कर सकता है, जो रासायनिक विधि की तुलना से कहीं अधिक है।

यह् भी निर्दिष्ट किया जाता है कि मुख्यतार वोल्टता के उपयुक्त समायोजन से पृष्ठ-भूमि तीव्रता के विचार से तथा आंतरिक परिणाम के प्रयोग से मूल्यांकन में और संशोधन किया जा सकता है। इस सम्बन्ध में आगे अनुसन्धान हो रहा है।

निर्देश

1. a. बर्क्स, एल० एस० तथा ब्रुक्स, ई० जे०। **एनालि० केमि०** 1958, **19A**, 30.

   b. लीमाफस्की, एच० ए०; विस्लो, ई० डब्ल्यू० तथा फाइफर, एच०। **वही,** 1960, **32,** (5), 240 **R.**

   c. मिकेलोज़, आर० ई०; अलर्वज़, आर० तथा किल्डे, बी० ए०। **जर्न०रास०, नैट०ब्यूर० स्टैंड,** 1961, **65 C**, 71.

   d. हेल, सी० सी० तथा किंग, डब्ल्यू० एच०। **जर्न एनालि०केमि०**, 1961, **33**, 74.

   e. डोर, एफ०। **जर्न एनालि०केमि०**, 1963, 197, 241.

   f. सुजिमोटो, एम० तथा कोबायाशी, के०। **बनसिकी कगाकू,** 1963, **12**, 164.

   g. फनसाका, डब्ल्यू० तथा अन्य। **बनसिकी कगाकू**, 1964, **13**, (1) 38.

   h. कार, के० जी०। **एनालिस्ट,** 1964, **346**, 89.

   i. गन, जी० एल०। **एनालि०-केमि०** 1964, **36**, 2086.

2. a. हरमोम्न, एम० । रिव० यूनिवर्सली-माइन्स, 1961, **17**, 257.

   b. हाऊटडर, एम०, हन्स, ए०; लिसर, एम०, तथा हैनकार्ट, जे० । रिव० मेट (पेरिस) 1964, **60**, 717.

   c. सिबैल, जी० तथा लीट्रेग्रान, जे०वाई० । रिव० मेट (पेरिस) 1964, **61**, 337.

3. a. बर्ड, ए० के० । नोरेलकोरिपोर्टर, 1961, **V 8, No. 6** 108.

   b. बेर्ड ए० के०, मैकोल ग्रार० एस०; तथा मैकइन्टायर, डी० बी० । "एड्वासेंस इन एक्स-रे एनालिसिस" Plenum Press N. Y. 1962, 412.

   c. बर्टिन, ई० पी० तथा रीटा, ग्रार० एल० । नोरेलको रिपोर्टर, 1962, **V 9** No. **2**, 31.

   d. चोड्स, ए० ए० तथा एन्जिलको । एड्वासेंस इन एक्स-रे एनालिसिस, प्लीनम प्रेस 1961, 401.

   e. वही अमेरि० मिनरल० 1961, **46**, 120.

   f. रोज़, एच० जे० तथा अन्य । यू० एस० जी०एस० प्रे फपेपर, 1962, 450B, **80**.

4. ब्राऊन, जे० सी० तथा डे, ए० के० । इन्डियन मिनरल वेल्थ, Oxford University Press, 1955, 176.

5. कृष्णन, एम० एस० । आयरन ग्रोर्स आफ इन्डिया Indian Association for the Cultivation of Science, Jadavpur, Calcutta 1955.

6. बेग्रर्ड, ए० के० तथा अन्य । एड्वासेंस इन एक्स-रे एनालिसिस भाग B, Plenum Press N. Y. 1962, 415.

7. a. पेयरबर्न, एच० डब्ल्यू० तथा अन्य । यू० एस० जी० एस० बुलटिन 1951, 908.

   b. स्टीवन्स, ग्रार० ई० तथा अन्य । यू० एस० जी० एस० बुलटिन 1960, 113.

8. बैनट सी० ए० तथा फ्रेंकलिन, एन० एल० । स्टैटिस्टिकल एनालिसिस इन केमेस्ट्री एण्ड कैमिकल इन्डस्ट्री 319.

9. क्लाउसिस, एफ० । **नोरेलकोरिपोर्टर,** 1957 भाग **3**, पृष्ठ 3, पी० आर० नं० 327 ।

10. केम्पवेल, डब्ल्यू० जे० तथा थैचर, जे० डब्ल्यू० । **एड्वासेंस इन एक्स-रे एनालिसिस**, 1960, **2**, 313.

11. स्मिथ्सन जी० एस०, ईगर, आर० एल० तथा वैनक्लियर ए० बी० । **एड्वासेंस इन एक्स-रे एनालिसिस**, 1960, **2**, 175.

12. चोड्स, ए० ए० तथा अन्य । **एड्वासेंस इन एक्स-रे एनालिसिस** 1960, **1**, 315.

13. a. वाल ब्रोथ, ए० । **नवाडा ब्यूरो आफ माइन्स**, 1963, **6**, 9.

b. लायटन, डब्ल्यू० तथा बेग्ले, ए०एस० । **आस्टर इन्स्ट० मिन० मेट० प्रो० स०** 1965, 215. **37**

14. सोलोमन, एम० एल० । **एड्वासेंस इन एक्स-रे एनालिसिस**, 1962, **B**, 389.

15. गार्टन, एफ० डब्ल्यू० । **जे० ब्रिट जर० एप्ला० फिजि०**, 1958, **10**, 105.

16. a. क्लग, एच० पी० तथा एलेग्जेंडर, एल० ई० । **एक्स-रे डिफ्रैक्सन प्रोसिजर्स, जानविले,** 1954, 271.

b. लिबाफस्की, एच०ए०, पीफेफर, जी० एच०, विन्स्लोई०एच० तथा जेमरी पो० डी० । **एक्स-रे एब्साप्र्शन एण्ड एमिशन एनेलिटिकल कैमेस्ट्री,** 1960. **विले**

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 11, No 3, July 1968, Pages 161-166

व्हिटेकर तथा बेसेल फलनों वाले समाकल

एच० बी० मल्लू
गणित विभाग, एम० आर० इंजीनियरिंग कालेज, जयपुर

[प्राप्त—अक्टूबर 14, 1967]

सारांश

प्रस्तुत शोधपत्र में क्रियात्मक कलन की सहायता से ह्विटेकर तथा बेसेल फलनों से सम्बधित कतिपय समाकलों का मान निकाला गया है।

Abstract

Integrals involving Whittaker and Bessel functions. *By* H. B. Maloo, Department of Mathematics, M. R. Engineering College, Jaipur.

In this paper some integrals involving Whittaker and Bessel functions have been evaluated by the methods of operational calculus.

1. **भूमिका**—पहले की भाँति $\phi(p) \doteq f(t)$ संकेत का प्रयोग

$$\phi(p)=p\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt. \tag{1.1}$$

के लिये हुआ है। पार्सेवाल सूत्र के अनुसार

यदि $\phi(p)\doteq f(t)$ तथा $\Psi(p)\doteq g(t)$

तो $$\int_0^\infty \phi(t)g(t)t^{-1}dt=\int_0^\infty \Psi(t)f(t)t^{-1}dt. \tag{1.2}$$

2. (i) माना कि [5, p. 368]

$$\Psi(p)=ap^{1/2}K_{2\mu}(ap^{1/2})e^{pa/2}\, W_{\lambda,\mu}\,(pa)$$

$$\doteqdot t^{-\lambda}(t+a)^{\lambda}\ \exp\left\{-\frac{(2t+a)a^2}{8t(t+a)}\right\}W_{\lambda,\mu}\left\{\frac{a^2a}{4t(t+a)}\right\} \tag{2.01}$$

$$=g(t),\quad R(p)>0,\quad R(a^2)>0,\quad R(a)>0.$$

तथा [1, p. 197(20)]

$$\phi(p)=ap\,(p+a)^{\rho}\,\frac{b^2}{e^{8(p+a)}}M\rho,_{\mu}\left\{\frac{b^2}{4(p+a)}\right\} \tag{2.02}$$

$$\doteqdot \frac{b\Gamma(1+2\mu)}{2\Gamma(\frac{1}{2}+\mu-\rho)}e^{-at}t^{-\rho-1/2}I_{2\mu}(bt^{1/2})$$

$$=f(t),\quad R(\tfrac{1}{2}+\mu-\rho)>0,\quad R(p+a)>0.$$

(1.2) में (2.01) तथा (2.02) सम्बन्धों का उपयोग करने पर

$$\int_0^{\infty}t^{-\lambda}(t+a)^{\lambda+\rho}\ \exp\left\{-\frac{(2t+a)a^2-b^2t}{8t(t+a)}\right\}M_{\rho,\mu}\left\{\frac{b^2}{4(t+a)}\right\}\ W_{\lambda,\mu}\left\{\frac{a^2a}{4t(t+a)}\right\}dt$$

$$=\frac{ab\Gamma(1+2\mu)}{2\Gamma(\frac{1}{2}+\mu-\rho)}\int_0^{\infty}t^{-\rho-1}I_{2\mu}(bt^{1/2})K_{2\mu}(at^{1/2})e^{-1/2at}W_{\lambda,\mu}(at)dt$$

लेखक द्वारा प्राप्त परिणाम [3] की सहायता से दाहिनी ओर के समाकल का मान निकालने पर

$$\int_0^{\infty}t^{-\lambda}(t+a)^{\lambda+\rho}\exp\left\{-\frac{(2t+a)a^2-b^2t}{8t(t+a)}\right\}M_{\rho,\mu}\left\{\frac{b^2}{4(t+a)}\right\}W_{\lambda,\mu}\left\{\frac{a^2a}{4t(t+a)}\right\}dt$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(ab)^{1+2\mu+2r}\Gamma(1+2\mu)2^{-2\rho-2}}{\Gamma(\frac{1}{2}+\mu-\rho)\ r!\ \Gamma(1+2\mu+r)\ (a^2+b^2)^{2\mu-\rho+2r}} \tag{2.03}$$

$$\times\, G^{22}_{23}\left(\frac{a^2+b^2}{4a}\middle|\begin{matrix}\frac{1}{2}-\mu,\ \frac{1}{2}+\mu\\ 2\mu-\rho+2r,\ -\rho,\lambda\end{matrix}\right)$$

यदि $R(a)>0,\quad R(b^2)>0, R(a^2)>0,\quad R(\frac{1}{2}-\rho+\mu\pm2\mu)>0.$

यदि हम उपर्युक्त में $b=O$ मान लें तो हमें सक्सेना [8] द्वारा दिया गया ज्ञात परिणाम प्राप्त होगा। किन्तु राठी [6 p. 67 (4.1)]

$$\int_0^\infty t^{-\lambda}(t+a)^{\lambda+\rho} \exp\left\{-\frac{(2t+a)a^2-b^2t}{8t(t+a)}\right\} M_{\rho,\mu}\left\{\frac{b^2}{4(t+a)}\right\} W_{\lambda,\mu}\left\{\frac{a^2a}{4t(t+a)}\right\} dt$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty} \frac{2^{-2\rho-2}\, b^{1+2\mu+2r}\,\Gamma(1+2\mu)}{r!\,\Gamma(\tfrac{1}{2}+\mu-\rho)\,\Gamma(1+2\mu+r)\,a^{-2\rho-1+2\mu+2r}} \tag{2.04}$$

$$\times G_{23}^{22}\left(\frac{a^2}{4a}\middle| \begin{matrix}\tfrac{1}{2}-\mu,\ \tfrac{1}{2}+\mu\\ 2\mu-\rho+r,\ -\rho+r,\ \lambda\end{matrix}\right)$$

यदि $R(a)>0,\quad R(a^2)>0,\quad R(b^2)>0,\quad R(\tfrac{1}{2}-\rho+\mu\pm2\mu)>0.$

(2.03) तथा (2.04) की तुलना करने पर

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(ab)^{1+2\mu+2r}}{r!\,\Gamma(1+2\mu+r)\,(a^2+b^2)^{2\mu-\rho+2r}}\; G_{23}^{22}\left(\frac{a^2+b^2}{4a}\middle| \begin{matrix}\tfrac{1}{2}-\mu,\ \tfrac{1}{2}+\mu\\ 2\mu-\rho+2r,\ -\rho,\ \lambda\end{matrix}\right)$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty} \frac{b^{1+2\mu+2r}}{r!\,\Gamma(1+2\mu+r)\,a^{2\mu-1-2\rho+2r}}\; G_{23}^{22}\left(\frac{a^2}{4a}\middle| \begin{matrix}\tfrac{1}{2}-\mu,\ \tfrac{1}{2}+\mu\\ 2\mu-\rho+r,\ -\rho+r,\ \lambda\end{matrix}\right) \tag{2.05}$$

(ii) अब माना कि [5, p. 369]

$$\Psi(p)=2pe^{ap}K_{2\mu}(2a^{1/2}t^{1/2})K_\mu(dp)$$

$$\doteqdot t^{-1/2}(t+2a)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{(t+a)a}{t(t+2a)}\right\} K_\mu\left\{\frac{aa}{t(t+2a)}\right\} \tag{2.06}$$

$$=g(t),\quad R(p)>0,\quad R(a)>0,\quad R(a)>0.$$

तथा [2, p. 375(25)]

$$\phi(p)=p(p+a)^{-\rho} G_{04}^{40}\left(\frac{b^2(p+a)^2}{16}\middle| \tfrac{1}{2}\nu,\ -\tfrac{1}{2}\nu,\ \tfrac{1}{2}\rho,\ \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\rho\right)$$

$$\doteqdot 2^{3-\rho}\,\pi^{1/2}\,t^{\rho-1}\,e^{-at}K_\nu\left(\frac{b}{t}\right) \tag{2.07}$$

$$=f(t),\quad R(b)>0,\quad R(p+a)>0.$$

(1.2) में (2.06) तथा (2.07) सम्बन्धों के उपयोग से

$$\int_0^\infty t^{-1/2}(t+\alpha)^{-\rho}(t+2\alpha)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{(t+\alpha)a}{t(t+2\alpha)}\right\}K_\mu\left\{\frac{a\alpha}{t(t+2\alpha)}\right\}$$

$$\times G^{40}_{04}\left(\frac{b^2(t+\alpha)^2}{16}\Big| \tfrac{1}{2}\nu,\ -\tfrac{1}{2}\nu,\ \tfrac{1}{2}\rho,\ \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\rho\right) dt$$

$$=2^{4-\rho}\pi^{1/2}\int_0^\infty t^{\rho-1}K_{2\mu}(2a^{1/2}t^{1/2})K_\mu(\alpha t)K_\nu(b/t)\,dt.$$

दाहिनी ओर के समाकल का मान एक ज्ञात परिणाम [9, p. 365(5.3)] की सहायता से निकालने पर

$$\int_0^\infty t^{-1/2}(t+\alpha)^{-\rho}(t+2\alpha)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{(t+\alpha)a}{t(t+2\alpha)}\right\}K_\mu\left\{\frac{a\alpha}{t(t+2\alpha)}\right\}$$

$$\times G^{40}_{40}\left(\frac{b^2(t+\alpha)^2}{16}\Big| \tfrac{1}{2}\nu,\ -\tfrac{1}{2}\nu,\ \tfrac{1}{2}\rho,\ \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\rho\right)dt$$

$$=\sum_{\mu;-\mu}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\pi^{1/2}\Gamma(-\mu)\Gamma(1+\mu)2^{\mu+\rho+2r-1}\alpha^{\mu+2r}}{r!\Gamma(1+\mu+r)a^{\mu+\rho+2r}} \tag{2.08}$$

$$G^{60}_{06}\left(\frac{b^2a^2}{16}\Big|\mu+\tfrac{1}{2}\rho+r,\ \mu+\tfrac{1}{2}\rho+\tfrac{1}{2}+r,\ \tfrac{1}{2}\rho,\ \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\rho,\ \tfrac{1}{2}\nu,\ -\tfrac{1}{2}\nu\right)$$

यदि $R(a)>0$, $R(a)>0$, $R(b)>0$. अब $\alpha\to O$ होने पर हमें ज्ञात परिणाम प्राप्त होगा।

(iii) माना कि [7]

$$\Psi(p)=\frac{p}{8\pi b}J_\mu(ap^{1/2})G^{31}_{13}\left(\frac{p^2}{16b^2}\Big|{\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}\mu \atop \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}\mu,\ \tfrac{1}{4}\mu,\ -\tfrac{1}{4}\mu}\right) \tag{2.09}$$

$$\doteqdot(16b^2t^2+1)^{-1/2}\exp\left\{-\frac{a^2}{4t(16b^2t^2+1)}\right\}J_{\mu/2}\left(\frac{a^2b}{16b^2t^2+1}\right)$$

$$=g(t),\quad R(p)>0,\quad R(\mu)>0,\quad b>0,\quad a>0.$$

तथा [1, p. 185 (34)]

$$\phi(p)=p^{3/2-\rho}\,e^{-c^2/8p}\,M_{\rho-1/2,\mu/2}\left(\frac{c^2}{4p}\right)$$

$$\doteqdot\frac{c\Gamma(1+\mu)}{2\Gamma(\rho+\mu/2)}t^{\rho-1}J_\mu(ct^{1/2}) \tag{2.10}$$

$$=f(t), \quad R(p)>0, \quad R(\rho>\mu'_2)>0.$$

(1.2) में (2.09) तथा (2.10) सम्बन्धों के उपयोग करने पर

$$\int_0^\infty t^{1/2-\rho}\,(16b^2t^2+1)^{-1/2}e^{-c^2/8t}\exp\left\{-\frac{a^2}{4t(16b^2t^2+1)}\right\}$$

$$\times \mathcal{J}_{\mu/2}\left\{\frac{a^2b}{16b^2t^2+1}\right\}M_{\rho-1/2,\mu/2}\left(\frac{c^2}{4t}\right)\,dt.$$

$$=\frac{c\Gamma(1+\mu)}{16\pi b\Gamma(\rho+\mu/2)}\int_0^\infty t^{\rho-1}\mathcal{J}_\mu(a\,t^{1/2})\mathcal{J}_\mu(c\,t^{1/2})$$

$$\times G^{31}_{13}\left(\frac{t^2}{16b^2}\middle|\begin{matrix}\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\mu\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{4}\mu,\ \frac{1}{4}\mu,\ -\frac{1}{4}\mu\end{matrix}\right)\,dt.$$

दाहिनी ओर के समाकल का मान ज्ञात परिणाम [4] की सहायता से निकालने पर

$$\int_0^\infty t^{1/2-\rho}(16b^2t^2+1)^{-1/2}e^{-c2/8p}\exp.\left\{-\frac{a^2}{4t(16b^2t^2+1)}\right\}$$

$$\times \mathcal{J}_{\mu/2}\left\{\frac{a^2b}{16b^2t^2+1}\right\}M_{\rho-1/2,\ \mu/2}\left(\frac{c^2}{4t}\right)dt.$$

$$=\sum_{r=0}^\infty\frac{c\,2^{2\rho-5}\Gamma(1+\mu)\,(ac)^{\mu+2r}}{\pi b\Gamma(\rho+\mu/2)\,r!\Gamma(1+\mu+r)\{(a^2+b^2)/4\}^{\rho+\mu+2r}} \tag{2.11}$$

$$\times G^{33}_{35}\left(\frac{b^2(a^2+c^2)^2}{4}\middle|\begin{matrix}\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\mu,\ 1-\frac{1}{4}\mu,\ 1+\frac{1}{4}\mu\\ \frac{\rho+\mu+1}{2}+r,\ \frac{\rho+\mu}{2}+r,\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}\mu,\ \frac{1}{2}\rho,\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\rho\end{matrix}\right)$$

यदि $R(3\mu+2\rho)>0,\ \ R(b)>0,\ \ R(c^2)>0,\ \ a>0$

जब $b\to 0$ तो हमें ज्ञात परिणाम [1, p. 215] प्राप्त होगा।

निर्देश

1. एर्डेल्यी, ए०। Tables of Integral Transforms, **भाग** I, **मैकग्राहिल, न्यूयार्क**, 1954.

2. वही। Tables of Integral Transforms, **भाग** II, **मैकग्राहिल, न्यूयार्क**, 1954.

3. मल्लू, एच० बी० । **मोनैटशेफ्टे फुर मैथमेटिक में** प्रकाशनार्थ स्वीकृत ।

4. वही । **वही ।**

5. राठी, पी० एन० । **जर्न० लन्दन मैथ० सोसा०**, 1965, **40**, 367-69.

6. वही । **विज्ञान परिषद् अनु० पत्रिका**, 1965, **8**, 63-69.

7. वही । **पी० एच० डी० थीसिस, जोधपुर विश्वविद्यालय**, 1965.

8. सक्सेना, आर० के० । **सेमिनारियो मैथमैटिको बार्सेलोना में** प्रकाशनार्थ स्वीकृत ।

9. शर्मा, के० सी० । **प्रोसी० नेश० इंस्टी० साइंस (इंडिया)**, 1964, **30**, 360-66.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. II, No. 3, July 1968, Pages 167-169.

पैलेडियम(II)-डाईमेथिल एमीनोईथेन थायोल संकीर्ण का चुम्बकीय एवं स्पेक्ट्रमीय अध्ययन

प्रकाश चन्द्र जैन, हीरालाल निगम एवं सुभाष चन्द्र सिन्हा
रसायन विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

[प्राप्त—जून 15, 1968]

सारांश

पैलेडियम (II)-डाईमेथिल एमीनोईथेन थायोल 2·0±0·1 पी-एच पर एक पीला संकीर्ण बनाता है। संकीर्ण ठोस अवस्था में प्राप्त किया गया है और विश्लेषण एवं चालकतामिति द्वारा उसका अध्ययन किया गया है। शोषण स्पेक्ट्रम में 29880 से०मी०$^{-1}$ तथा 41435 से०मी०$^{-1}$ पर संकीर्ण का वर्ग समतलीय दिक्रसायन सिद्ध करते हैं। पैलेडियम (II) के अन्य संकीर्णों की भाँति प्रस्तुत संकीर्ण भी प्रतिचुम्बकीय है। प्रस्तुत संकीर्ण में लिगैण्ड एक-दन्तुर है।

Abstract

Magnetic and spectral studies on a Pd (II) dimethyl aminoethane thiol complex *By* P. C. Jain, H. L. Nigam and S.C. Sinha, Chemical Laboratories, University of Allahabad, Allahabad.

Pd (II) has been found to form a yellow complex with dimethyl aminoethane thiol at pH 2·0±0·1. The complex has been isolated and charactisised by analysis and conductometric measurements. The Square-planar stereochemistry has been assigned to the complex as evidenced by appearance of the spectral band at 29880 cm^{-1} and 41435 cm^{-1}. The complex is diamagnetic, as expected. The ligand appears to exhibit its mono-dentate nature in the present complex.

डाईमेथिल एमीनोईथेन थायोल-हाइड्रोक्लोराइड (जिसका संक्षिप्त नाम, DMAET), $(CH_3)_2.N.CH_2.CH_2.SH–HCl$. का वर्णन पैलेडियम (II)[1] के लिये रंगमापी अभिकर्मक के रूप में किया जा चुका है परन्तु इस संकीर्ण को ठोस अवस्था में प्राप्त करने का प्रयास नहीं किया गया है। प्रस्तुत शोध पत्र में इस संकीर्ण के निर्माण एवं संरचना के अध्ययन का वर्णन किया गया है। पैलेडियम(II) के सल्फर लिगैण्डों से बने संकीर्णों का अध्ययन इस दृष्टि से अधिक महत्वपूर्ण है क्योंकि ये संकीर्ण पर्याप्त स्थायी[2,3] होते हैं और सुगमता से सल्फर-सेतुओं का निर्माण करते हैं।

प्रयोगात्मक

0·2 *M* $PdCl_2$ विलयन के 25 मि०ली० को डाईमेथिल एमीनोईथेन थायोल के समअणुक विलयन के 100 मि०ली० के साथ मिश्रित किया गया। दोनों विलयनों का माध्यम जल था। DMAET का मानक विलयन आयोडोमिति की सहायता से तैयार किया गया। मिश्रण का पी-एच 2·0 तक लाने पर एक पीले रंग का अवक्षेप प्राप्त हुआ। अवक्षेप को निस्यन्दक पत्र से छानकर जल एवं ईथर से अच्छी तरह धोया गया। संकीर्ण को 70-80° पर सुखा लिया गया। संकीर्ण की लब्धि 1·5 ग्राम थी और यह 225° पर विच्छेदित हो गया। डाईक्लोरोबिस (डाईमेथिलएमीनोईथेन थायोल) पैलेडियम (II) हेक्साहाइड्रेट, $[Pd(C_4H_{11}NS)_2Cl_2]. 6H_20$ में विभिन्न अवयवों की प्रतिशत मात्रा निम्न प्रकार होनी चाहिए थी :

Pd=21·5%, S=13·0%, C=19·3%, H=6·5%, तथा N=5·7%.

संकीर्ण के विश्लेषण द्वारा अवयवों की प्रतिशत मात्रा निम्नलिखित प्राप्त हुई :

Pd=21·3%, S=12·8%, C=20·95, %, H=6·54% तथा N=5·81%

संकीर्ण जल में अल्प विलेय है जिससे पीला विलयन प्राप्त होता है। इस विलयन की सिल्वर नाइट्रेट से अभिक्रिया कराने पर कोई अवक्षेप प्राप्त नहीं होता है। संकीर्ण का जलीय विलयन विद्युत अनपघट्य है (Λ_m=46 म्हो०, विलयन की सान्द्रता =$1 \times 10^{-3} M$)। अल्प मात्रा में विलेय होने के कारण संकीर्ण का अणुभार ज्ञात करना संभव नहीं हो सका। **ग्वाई विधि** द्वारा चुम्बकीय अध्ययन से संकीर्ण की प्रतिचुम्बकीय प्रवृत्ति का बोध होता है। ($X_g = -0·9931 \times 10^{-6}$ स० ग० स० इकाई 304° परम ताप पर)। आसुत जल में **परकिन-एल्मर स्पैक्ट्रो कार्ड** (Perkin-Elmer Spectracord) द्वारा संकीर्ण का स्पेक्ट्रममापी अध्ययन करने पर दो शोषण शिखर (Absorption peaks) प्राप्त होते हैं, जिनकी स्थितियाँ क्रमशः 29880 से०मी०$^{-1}$ तथा 41435 से०मी०$^{-1}$ पर हैं।

विश्लेषण द्वारा धातु तथा सल्फर में 1:2 की निष्पत्ति पाई गई। पैलेडियम(II) प्रायः चतुः उपसंयोजी वर्ग समतलीय संकीर्णों का निर्माण करता है जिनका संकरण (Hybridisation) 4d 5s $5p^2$ होता है एवं उनकी प्रकृति प्रतिचुम्बकीय होती है [6,7]।

संकीर्ण के शोषण स्पेक्ट्रम में दो शोषण शिखर क्रमशः 29880 से०मी०$^{-1}$ तथा 41435 से०मी०$^{-1}$ पर प्राप्त होते हैं। जोरगेन्सन[8] ने डाई थायोआक्सेलेट, डाईथायो कार्बोनेट तथा डाईथायो फॉस्फेट लिगैण्डों के वर्ग समतलीय संकीर्णों के शोषण स्पेक्ट्रम में इन्हीं स्थितियों में शोषण शिखरों का उल्लेख किया है। प्रस्तुत संकीर्ण के शोषण स्पेक्ट्रम में प्राप्त शोषण शिखर निम्नलिखित संक्रमणों (transitions) के परिणामस्वरूप हो सकते हैं।

29770 से० मी०$^{-1}$ $^1A_1g \rightarrow {}^1B_1u$

41435 से० मी०$^{-1}$ $L \rightarrow L^+$ (आवेश स्थानान्तरण के कारण)

अतएव, संकीर्ण का स्पेक्ट्रमी एवं चुम्बकीय व्यवहार पैलेडियम (II) आयन के चतुर्दिक वर्ग समतलीय दिक्रसायन की पुष्टि करता है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकगण इवान्स कैमेटिक्स, न्यूयार्क के आभारी हैं जिन्होंने DMAET भेंटस्वरूप प्रदान किया। लेखक (प्र०च०जै०) औद्योगिक एवं वैज्ञानिक अनुसंधान परिषद, नई दिल्ली के आर्थिक सहायता के लिये भी आभारी है।

निर्देश

1. यो तथा बर्क। **टैलैण्टा,** 1963, **10** (12), 1267.
2. जैन्सन। **ज़ैड० अनार्गै० कैम०,** 1935, 252, 97, 115.
3. वही। **वही,**1944, 252, 226.
4. चैट तथा हार्ट। **जर्न० केमि० सोसा०,** 1953, 2363.
5. लिविंग्सटन तथा प्लाउमैन। **जर्न प्रोसी० रॉयल सोसा० (एन० एस० डबल्यू०),** 1952, **85,** 116.
6. निगम तथा सिन्हा। **इण्डियन जर्न० केमि०,** 1966, **4** (8), 372,
7. निगम तथा कुमार। **एक्टा० किम०,** 1966, **48** (3), 219.
8. जोरगेन्सन। **जर्न० इनार्गै० न्यूक्लि० केमि०,** 1962, **24,** 1571.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. II, No. 3, July 1968, Pages 171-175

N-सैलिसिलिडीन ऐंथ्रैनिलिक अम्ल के धातु संकीर्ण

आर० के० मेहता, एस० पी० राव तथा आर० सी० कपूर

[प्राप्त—जून 10, 1968]

सारांश

Fe(II), Co(II), Ni(II), Zn(II) तथा Cd(II) के *N*-सैलिसिलिडीन ऐंथ्रैनिलिक अम्ल शिफ क्षारक संकीर्णों को ठोस अवस्था में पृथक करके उनकी तत्वयोगमिति तथा चुम्बकीय प्रवृत्ति का निश्चयन किया गया है। इन संकीर्णों में धातु-लिगैण्ड तत्वयोगमिति 1:1 पाई गई। इन यौगिकों के चुम्बकीय आँकड़ों को उनके चतुष्फलकीय संरचनाओं के आधार पर विवेचित किया गया है।

Abstract

Metal complexes of *N*-salicylidene anthranilic acid. *by* R. K. Mehta, S. P. Rao and R. C. Kapoor, Department of Chemistry, University of Jodhpur, Jodhpur.

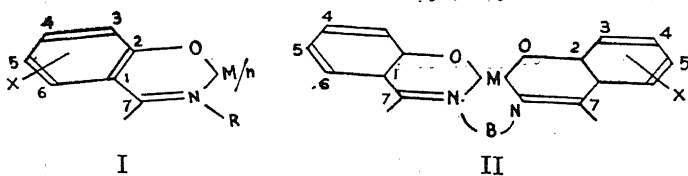
The *N*-salicylidene anthranilic acid Schiff's ba·e complexes of Fe(II), Co(II), Ni(II), Zn(II) and Cd(II) have been isolated in the solid state. Their stoichiometry and magnetic susceptibility have been determined. The metal-ligand stoichiometry is found as 1:1 in these complexes. The magnetic data of these compounds have been explained on the basis of their tetrahedral structures.

हाल ही में हॉम[1] इत्यादि ने शिफ क्षारक संकीर्णों का सर्वेक्षण किया है। इनमें से सैलिसिल्डिमीन संकीर्ण, जिनकी संरचनायें I तथा II प्रकार की हैं, अधिक महत्वपूर्ण हैं :

4 3 2 O M/n 5 X 6 1 7 N R

I

4 5 O .6 7 N M O 2 3 4 5 X N 7 B

II

जिनमें R, X तथा B क्रमशः सार्वत्रिक नाइट्रोजन वलय तथा सेतुनिर्मायक समूह प्रतिस्थापक हैं[1]। इनके अतिरिक्त, शिफ क्षारक संकीर्ण की एक और प्रकार की संरचना, III, की सूचना दी गई है।[1]

सारणी 1

N- सैलिसिलिडीन ऐंथ्रैनिलिक अम्ल के धातु-संकीर्णों का तात्विक विश्लेषण तथा अणु-भार

धातु संकीर्ण	जलयोजित धातु-संकीर्ण								पिरिडिनो-धातु-संकीर्ण					
	अणु भार		जल		धातु		नाइट्रोजन		अणु भार		धातु		नाइट्रोजन	
	प्राप्त	परिगणित	प्राप्त	परिगणित	प्राप्त	परिगणित	प्राप्त	परिगणित	प्राप्त	परिगणित	प्राप्त	परिगणित	प्राप्त	परिगणित
$Fe(C_{14}H_9NO_3)X$	289	312.8	5.62	5.75	17.78	17.84	4.30	4.47	350	373.8	14.85	14.92	7.39	7.49
$Co(C_{14}H_9NO_3)X$	300	315.9	5.55	5.69	18.60	18.64	4.23	4.43	361	376.9	15.57	15.62	7.27	7.42
$Ni(C_{14}H_9NO_3)X$	322	315.7	5.59	5.70	18.42	18.59	4.31	4.43	383	376.7	15.41	15.58	7.31	7.43
$Zn(C_{14}H_9NO_3)X$	336	322.3	5.46	5.58	20.16	20.28	4.29	4.34	397	383.3	16.97	17.03	7.19	7.30
$Cd(C_{14}H_9NO_3)X$	356	369.4	4.76	4.86	30.38	30.42	3.65	3.78	417	430.4	25.95	26.11	6.39	6.50

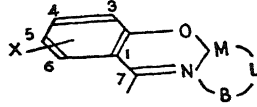
जहाँ $X = H_2O$ या C_5H_5N.

सारणी 2

301°K पर *N*- सैलिसिलिडीन ऐंथ्रैनिलिक अम्ल के धातु-संकीर्णों के चुम्बकीय आँकड़े

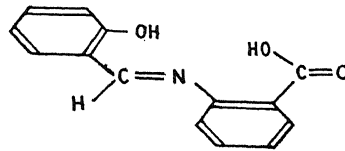
धातु-संकीर्ण	जलयोजित धातु-संकीर्ण				पिरिडिनो-धातु-संकीर्ण	
	द्रव्यमान प्रवृत्ति $\chi_s \times 10^{-6}$	मोलर प्रवृत्ति $\chi_m \times 10^{-6}$	चुम्बकीय आघूर्ण B.M.	अयुग्मित इलेक्ट्रानों की संख्या	चुम्बकीय आघूर्ण B.M.	अयुग्मित इलेक्ट्रानों की संख्या
$Fe(C_{14}H_9NO_3)X$	34.34	10877.66	5.13	4	5.10	4
$Co(C_{14}H_9NO_3)X$	26.99	8664.90	4.58	3	4.54	3
$Ni(C_{14}H_9NO_3)X$	17.18	5562.11	3.67	2	3.64	2

जहाँ $X = H_2O$ अथवा C_5H_5N.

N- सैलिसिलिडीन ऐंथ्रैनिलिक अम्ल के Zn (II) तथा Cd (II) संकीर्ण आशानुरूप प्रतिचुम्बकीय पाये गये ।

III

जिसमें L सार्वत्रिक आक्सीजन तथा B फेनिल मूलक है।

इन संकीर्णों की सबसे रोचक बात उनका चुम्बकीय आचार है जो B की संरचनात्मक प्रकृति पर तया चतुर्थ उपसंयोजकता स्थिति घेरने वाले लिगैंड की उपस्थिति अथवा अनुपस्थिति पर निर्भर करता है। इस प्रकार (III) के धातु संकीर्ण दो समूहों में विभक्त किये जा सकते हैं। प्रथम समूह अप-सामान्य आघूर्ण प्रदर्शित करता है और वे त्रि-उपसंयोजक संयुग्मित लिगैंड इकाइयों से जो समतलीय हैं बने होते हैं। कुबो इत्यादि[2,3] ने प्रदर्शित किया है कि द्वितीय समूह सामान्य आघूर्ण प्रदर्शित करता है और उनमें दो संरचनात्मक प्रतिबन्ध होते है (i) B से निर्मित छह सदस्यीय कीलेट वलय, जिसमें एक ऐरोमैंटीय बन्ध होता है, की उपस्थित (ii) कार्बोनिल समूह की उपस्थित। ये दोनों प्रतिबन्ध $BL{=}O{-}C_6H_4COO$ द्वारा, जो ऐंथ्रै निलिक अम्ल ($H_2NC_6H_4COOH$) में उपस्थित रहता है, संतुष्ट होते हैं।

N- सैलिसिलिडीन ऐंथ्रै निलिक अम्ल द्विप्रोटिक त्रि-दन्तुर है जिसमें एक कार्बोक्सिल, फिनालीय हाइड्राक्सिल तथा एक इमिनो समूह होता है जो इसकी संरचना (IV) से स्पष्ट है। फलतः इस लिगैंड के साथ बने संकीर्णों में धातु आयन की चतुर्थ उपसंयोजकता स्थिति की पूर्ति एक जल अणु अथवा पिरिडीन अणु द्वारा होनी चाहिए।

IV

प्रयोगात्मक

इस अध्ययन में प्रयुक्त लोह, कोबाल्ट, निकेल, जिंक तथा कैडमियम के लवण वैश्लेषिक अभिकर्मक कोटि (BDH) के थे। ऐंथ्रै निलिक अम्ल (L.R) को बिना शुद्ध किये ही प्रयुक्त किया गया। सैलिसिल्डै-हाइड (L.R) को पुनः आसवित करके प्रयुक्त किया गया।

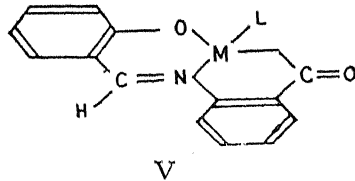
अणुभार निश्चयन के लिये गैलेनकैम्प अर्धसूक्ष्म एलुबिओमीटर प्रयुक्त किया गया। दहन विश्लेषण होसली की वैद्युत सूक्ष्म दहन भट्टी में किया गया। चुम्बकीय प्रवृत्ति मापनों के लिये राज दरकार तथा कम्पनी, बम्बई, द्वारा प्रदत्त गॉय उपकरण का प्रयोग गया।

N-सैलिसिलिडीन ऐंथ्रैनिलिक अम्ल तथा Fe(II), Co(II), Ni(II), Zn(II) तथा Cd(II) के साथ इसके धातु संकीर्णों को फाइफर[4] की विधि द्वारा तैयार किया गया। पिरिडीन धातु-संकीर्णों को जलयोजित धातु-संकीर्णों से पिरिडीन के उपचार द्वारा निर्मित करके उन्हें विशुद्ध क्रिस्टलीय अवस्था में पृथक किया गया।

परिणाम तथा विवेचना

इन संकीर्णों की तत्वयोगमिति का निश्चयन उनके तात्विक विश्लेषण तथा पिरिडीन को विलायक के रूप में व्यवहृत करते हुये एबुलियोस्कोपीय विधि द्वारा अणुभार के द्वारा किया गया। विभिन्न संकीर्णों की चुम्बकीय प्रवृत्ति का मापन चूर्ण अवस्था में किया गया। प्राप्त परिणाम सारणी 1 तथा 2 में संग्रहीत हैं।

Fe (II), Co (II) तथा Ni (II) के धातु-संकीर्ण समचुम्बकीय पाये गये किन्तु Zn (II) तथा Cd (II) के धातु-संकीर्ण आशा के अनुरूप प्रतिचुम्बकीय थे। जलयोजित तथा पिरिडिनो-संकीर्णों के चुम्बकीय आघूर्ण प्रायः समान देखे गये (सारणी 2) और उनके मान चक्रण-मात्र (Spin only) आघूर्णों के समतुल्य हैं जो इन संकीर्णों में क्रमशः 4, 3 तथा 2 अयुग्मित इलेक्ट्रानों की उपस्थिति के अनुरूप हैं। इन अयुग्मित इलेक्ट्रानों की संख्या वही है जो उनके संगत धातु आयनों में विद्यमान है। अतः वे sp^3 संकरण प्रदर्शित करते हैं और सम्भवतः उनकी संरचना चतुष्फलकीय है। इनके तात्विक विश्लेषण एवं अणु भार निश्चयनों से (सारणी 1) 1:1 धातु लिगैंड तत्वयोगमिति दृष्टिगोचर होती है और इनसे यह संकेत मिलता है कि ये संकीर्ण ठोस अवस्था में एकलक के रूप में विद्यमान हैं। ये फल Fe (II), Co (II) तथा Ni (II) संकीर्णों के लिये पूर्वसूचित मानों के अनुरूप हैं। फलतः इन संकीर्णों की संरचना चतुष्फलकीय हो सकती है जो निम्नांकित प्रकार (V) की होगी

V

जिसमें M= Fe (II), Co (II), या Ni (II)
L=H_2O या P_y

इस शिफ क्षारक के Zn (II) तथा Cd (II) संकीर्णों में 1:1 धातु लिगैंड तत्वयोगमिति पाई जाती है जिसकी स्थापना तात्विक विश्लेषण तथा अणु भार निश्चयन से की गई है। फलतः इन यौगिकों में भी (V) में प्रदर्शित संरचनायें हो सकती हैं।

परिणामों के सूक्ष्मावलोकन से यह विदित होता है कि *N*- सैलिसिलिडीन ऐंथ्रैनिलिक अम्ल तथा *N*- सैलिसिलिडीन β एलैनीन के चुम्बकीय आचरण समान हैं[5]। प्रस्तुत शोधों से यह सिद्ध हो जाता है

कि इन लिगैंडों से व्युत्पन्न सामान्य कोटि III के संकीर्णों की विशिष्टतायें ऐरोमैटीय वलय की उपस्थिति या अनुपस्थिति पर निर्भर नहीं करतीं वरन् उनके संकीर्णों में सामान्य एकरूपता का कारण कार्बोक्सिलीय समूह की β- स्थिति पर ऐजोथीन समूह में नाइट्रोजन परमाणु की उपस्थिति है। ये परिणाम किशिता तथा अन्यों[3] द्वारा शोध किये गये N-सैलिसिलिडीनग्लिसिनैटो Cu (II) संकीर्णों की भाँति हैं।

निर्देश

1. हॉम, आर० एच०, एवेरेट, जी० डब्लू० तथा चक्रवर्ती, ए०। Progress in Inorgamic Chemistry, **इंटर साइंस पब्लिशर्स, न्यूयार्क**, 1966.
2. कुबो, एम०, कुरोडा, वाई०, किशिता, एम० तथा मुटो, वाई०। **आस्ट्रेलियन जर्न० केमि०**, 1963, **16**, 7.
3. किशिता, एम०, नाकाहारा, ए० तथा कुबो, एम०। **वही**, 1964, **17**, 810.
4. फाइफर, पी०, आफरमान, डब्लू० तथा वर्नर, एच०। **जर्न० प्रैक्टि० केमि०**, 1942, **159**, 313.
5. मेहता, आर० के०। **शोध प्रबंध, जोधपुर विश्वविद्यालय**, 1967

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 11, No. 3, July 1968, Pages 177-191

माइजर के G फलन सम्बन्धी कुछ प्रसार सूत्र

एस० डी० बाजपेयी
गणित विभाग, श्री जी० एस० टेक्नालाजिकल इंस्टीच्यूट, इंदौर

[प्राप्त—जुलाई 1, 1967]

सारांश

प्रस्तुत शोध पत्र में माइजर के G फलन सम्बन्धी कुछ प्रसार सूत्र व्युत्पन्न किये गये हैं। इन प्रसारों से मैकराबर्ट के E फलन के लिये दो प्रसार प्राप्त किये गये हैं। विम्प, ल्यूक तथा माइजर के कई प्रसार सूत्र हमारी विशिष्ट दशाओं के रूप में प्राप्त होते हैं।

Abstract

Some exapnsion formulae for Meijer's G-function. *By* S. D. Bajpai, Department of Mathematics, Shri G. S. Technological Institute, Indore.

In this paper some expansion formulae for Meijer's G-function have been derived. From these expansions two expansions for MacRobert's E function are deduced. A number of expansion formulae due to Wimp, Luke and Meijer follow as our particular cases.

1. आगे हम संक्षेपण की दृष्टि से a_p द्वारा $a_1, a_2, \ldots, a_p$; $(a_p)_\mu$ द्वारा $\prod_{j=1}^{p} (a_j)_\mu$ तथा $\triangle(\delta, a)$ द्वारा $\frac{a}{\delta}, \frac{a+1}{\delta}, \ldots, \frac{a+\delta-1}{\delta}$ प्राचलों के समुच्चय को व्यक्त करेंगे।

उपपत्ति के लिए निम्नांकित सूत्रों की आवश्यकता पड़ेगी :–

$$\int_{-1}^{1} (1-x)^\sigma (1+x)^\beta P_r^{(\alpha,\beta)}(x)\, G_{p,q}^{m,n}\left[z\left(\frac{1-x}{2}\right)^\delta \middle| \begin{matrix} a_p \\ b_q \end{matrix}\right] dx$$

$$=\frac{2^{\beta+\sigma+1}\Gamma(\beta+r+1)}{r\,!}\,\delta^{-1-\beta}$$

$$G_{p+2\delta,\, q+2\delta}^{m+\delta,\, n+\delta}\left[z \middle| \begin{matrix} \triangle(\delta,-\sigma), a_p, \triangle(\delta, a-\sigma) \\ \triangle(\delta, a-\sigma+r), b_q, \triangle(\delta, -1-\beta-\sigma-r) \end{matrix}\right] \qquad (1.1)$$

जहाँ δ धनात्मक पूर्ण संख्या है तथा

$$p+q<2(m+n), \quad |arg\, z|<(m+n-\tfrac{1}{2}p-\tfrac{1}{2}q)\pi, \quad Re\, \beta>-1, \quad Re(\sigma+\delta b_m)>-1,$$

जो [8, p.198,(3.2)] से अनुसरित होता है।

$$\int_0^\infty x^{\rho-1}e^{-x}\, L_\beta^\alpha(x)\, G_{p,\,q}^{m,\,n}\left[zx^\delta \,\middle|\, \begin{matrix} a_p \\ b_q \end{matrix}\right] dx$$

$$=\frac{\delta^{\beta+\rho-1/2}(2\pi)^{1/2-1/2\delta}}{\beta!}\; G_{p+2\delta,\,q+\delta}^{m+\beta,\,n+\delta}\left[z\delta^\delta \,\middle|\, \begin{matrix} \triangle(\delta,1-\rho),\, a_p,\, \triangle(\delta,\alpha-\rho+1) \\ \triangle(\delta,\alpha+\beta-\rho+1),\, b_q \end{matrix}\right], \quad (1.2)$$

जहाँ δ धनात्मक पूर्ण संख्या है तथा

$$p+q<2(m+n), \quad |\, arg\, z\,|<(m+n-\tfrac{1}{2}p-\tfrac{1}{2}q)\pi, \quad Re(\rho+\delta b_m)>0.$$

जो G फलन को मेलिन बार्नीज प्रकार के समाकल के रूप में व्यक्त करने [1, p.207,(1)], समाकलन के क्रम को बदलने तथा [3, p. 292, (1)] के प्रयोग द्वारा तथा गामा फलन के लिए गुणन-सूत्र द्वारा स्थापित होता है।

$$\int_0^\infty x^{-\rho}\, e^{-\beta x}\, G_{p,\,q}^{m,\,n}\left[zx^\delta \,\middle|\, \begin{matrix} a_p \\ b_q \end{matrix}\right] dx$$

$$=(2\pi)^{1/2-1/2\delta}\,\delta^{1/2-\rho}\,\beta^{\rho-1}\, G_{p+\delta,\,q}^{m,\,n+\delta}\left[z\left(\frac{\delta}{\beta}\right)^\delta \,\middle|\, \begin{matrix} \triangle(\delta,\rho),\, a_p \\ b_q \end{matrix}\right], \quad (1.3)$$

जहाँ δ धनात्मक पूर्णसंख्या है तथा

$$p+q<2(m+n), \quad |\, arg\, z|<(m+n-\tfrac{1}{2}p-\tfrac{1}{2}q)\pi, \quad Re(\delta b_m-\rho)>-1.$$

जो [3, p. 419, (5)] का सार्वीकरण है और सरलता से व्युत्पन्न किया जा सकता है।

2. इस अनुच्छेद में हम निम्नांकित प्रमेयिकाओं की स्थापना करेंगे:

प्रमेयिका 1.

(i) माना कि निम्नांकित में से कोई भी ऋणात्मक पूर्ण संख्याएँ नहीं हैं।

$$b_m+\frac{\mu-i}{\delta}; \quad b_m+\frac{\mu+\alpha-i}{\delta}; \quad \alpha+\beta+1; \quad b_m-a_n$$

जहाँ $i=0, 1, 2, \ldots, \delta-1$.

(ii) माना कि $p+q<2(m+n)$, $|\, arg\, z\,|<(m+n-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q)\pi$,

$Re(\mu+\alpha+\delta b_m)>-1$, $Re\, \alpha>-1$, $Re\, \beta>-1$.

(iii) माना कि δ धनात्मक पूर्ण संख्या है तथा p, q, m तथा n या तो धनात्मक पूर्ण संख्याएँ हैं या शून्य हैं

$$p \leqslant q-1 \text{ या } p=q \text{ तथा } |z|<1,$$

$$0 \leqslant m \leqslant q;\ 0 \leqslant n \leqslant p;\ q+s \geqslant 1.$$

(iv) माना कि $0<\omega<1,\ z \neq 0.$

(v) माना कि $-\alpha-2\delta b_m < 2\mu+\frac{3}{2}.$

तो

$$\omega^{\mu} G_{p,\, q}^{m,\, n}\left[z\,\omega^{\delta} \,\middle|\, \begin{matrix} a_p \\ b_q \end{matrix}\right] = \frac{\delta^{-1-\beta}}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(\alpha+\beta+2N+1)\,\Gamma(\alpha+\beta+N+1)}{N!}$$

$$\times G_{p+2\delta,\, q+2\delta}^{m+\delta,\, n+\delta}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix} \Delta(\delta,-\mu-\alpha),\ a_p,\ \Delta(\delta,-\mu) \\ \Delta(\delta,-\mu+N),\ b_q,\ \Delta(\delta,-1-\alpha-\beta-\mu-N) \end{matrix}\right]$$

$$\times {}_2F_1\left[\begin{matrix} -N,\ N+\alpha+\beta+1 \\ \alpha+1 \end{matrix} ;\omega\right], \tag{2.1}$$

अथवा वैकल्पिक रूप

$$\omega^{\mu} G_{p,\, q}^{m,\, n}\left[z\omega^{\delta} \,\middle|\, \begin{matrix} a_p \\ b_q \end{matrix}\right] = \frac{\delta^{-1-\beta}}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\ (\alpha+\beta+2N+1)\ \Gamma(\alpha+\beta+N+1)}{N!}$$

$$\times G_{p+2\delta,\, q+2\delta}^{m,\, n+2\delta}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix} \Delta(\delta,-\mu),\ \Delta(\delta,\ -\mu-\alpha),\ a_p \\ b_q,\ \Delta(\delta,\ N-\mu),\ \Delta(\delta,\ -1-\alpha-\beta-\mu-N) \end{matrix}\right]$$

$$\times {}_2F_1\left[\begin{matrix} -N,\ N+\alpha+\beta+1 \\ \alpha+1 \end{matrix} ;\ \omega\right], \tag{2.2}$$

उपपत्ति:

(2.1) को सिद्ध करने के लिये माना कि

$$\left(\frac{1-x}{2}\right)^{\mu}\ G_{p,\, q}^{m,\, n}\left[z\left(\frac{1-x}{2}\right)^{\delta} \,\middle|\, \begin{matrix} a_p \\ b_q \end{matrix}\right] = \sum_{N=0}^{\infty} C_N P_N^{(\alpha,\beta)}(x) \tag{2.3}$$

(2.3) में दोनों ओर $(1-x)^{\alpha}(1-x)^{\beta} P_{\nu}^{(\alpha,\beta)}(x)$ द्वारा गुणा करने पर तथा x के प्रति -1 से 1 तक समाकलन करने पर, (1.1) का व्यवहार करने तथा जैकोबी बहुपदियों के लांबिक गुण धर्म के कारण [3, p. 285, (9)], [3, p. 285, (5)], हमें

$$C_{\nu} = \frac{(\alpha+\beta+2\nu+1)\ \Gamma(\alpha+\beta+\nu+1)}{\Gamma(\alpha+\nu+1)\ \delta^{1+\beta}}$$

$$\times G_{p+2\delta,\, q+2\delta}^{m+\delta,\, n+\delta}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix} \Delta(\delta,-\mu-\alpha),\ a_p,\ \Delta(\delta,-\mu) \\ \Delta(\delta,-\mu+\nu),\ b_q,\ \Delta(\delta,-1-\alpha-\beta-\nu-N) \end{matrix}\right] \tag{2.4}$$

$p+q<2(m+n)$, $|arg\ z|<(m+n-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q)\pi$, $Re\ \alpha>-1$, $Re\ \beta>-1$,

$Re\ (\mu+\alpha+\delta b_m)>-1$. प्राप्त होगा।

अब (2.3) तथा (2.4) से हमें

$$\left(\frac{1-x}{2}\right)^{\mu} G_{p,\ q}^{m,\ n}\left[z\left(\frac{1-x}{2}\right)^{\delta}\ \Big|\ \begin{matrix} a_p \\ b_q \end{matrix}\right]$$

$$=\sum_{\mathcal{N}=0}^{\infty}\frac{(\alpha+\beta+2\mathcal{N}+1)\ \Gamma(\alpha+\beta+\mathcal{N}+1)}{\Gamma(\alpha+\mathcal{N}+1)}\delta^{-1-\beta} \tag{2.5}$$

$$\times G_{p+2\delta,\ q+2\delta}^{m+\delta,\ n+\delta}\left[z\ \Big|\ \begin{matrix} \triangle(\delta,-\mu-\alpha),\ a_p,\ \triangle(\delta,-\mu) \\ \triangle(\delta,-\mu+\mathcal{N}),\ b_q,\ \triangle(\delta,-1-\alpha-\beta-\mu-\mathcal{N}) \end{matrix}\right]\times P_{\mathcal{N}}^{(\alpha,\beta)}(x)$$

मिलेगा। (2.5) में $(1-x)/2=w$ रखने पर तथा [7, p. 254, (1)], का व्यवहार करने पर (2.1) परिणाम की प्राप्ति होगी।

सर्वसमिका (identity) से

$$G_{p+2\delta,\ q+2\delta}^{m+\delta,\ n+\delta}\left[z\ \Big|\ \begin{matrix} \triangle(\delta,-\mu-\alpha),\ a_p,\ \triangle(\delta,-\mu) \\ \triangle(\delta,-\mu+\mathcal{N}),\ b_q,\ \triangle(\delta,-1-\alpha-\beta-\mu-\mathcal{N}) \end{matrix}\right]$$

$$=(-1)^{\mathcal{N}}G_{p+2\delta,\ q+2\delta}^{m,\ n+2\delta}\left[z\ \Big|\ \begin{matrix} \triangle(\delta,-\mu),\ \triangle(\delta,-\mu-\alpha),\ a_p \\ b_q,\ \triangle(\delta,-\mu+\mathcal{N}),\ \triangle(\delta,-1-\alpha-\beta-\mathcal{N}-\mu) \end{matrix}\right], \tag{2.6}$$

जो G फलन की परिभाषा से अनुसरण होती है (2.1) से (2.2) परिणाम प्राप्त होता है।

प्रमेयिका 2.

(i) माना कि निम्नांकित में से कोई भी मात्रा ऋणात्मक पूर्ण संख्या नहीं है।

$b_m+\frac{\mu-i}{\delta}$; $b_m+\frac{\mu+\alpha-i}{\delta}$; b_m-a_n जहाँ $i=0, 1, 2, \ldots, \delta-1$.

(ii) माना कि $p+q<2(m+n)$, $|\ arg\ z\ |<(m+n-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q)\pi$, $Re\ (\mu+\alpha+\delta b_m)>-1$, $Re\ \alpha>-1$.

(iii) यदि δ धनात्मक पूर्ण संख्या हो तथा p, q, m तथा n धनात्मक पूर्ण संख्याएँ या शून्य हो तो

$$p\leqslant q-1 \text{ या } p=q \text{ तथा } |zw^{\delta}|<1,\ p+\delta\leqslant q-1,$$

$$0\leqslant m\leqslant q;\ 0\leqslant n\leqslant p;\ q+s\geqslant 1.$$

(iv) माना कि $0<\omega<\infty$, $z\neq o$.

(v) माना कि $-a-2\delta b_m<2\mu+\frac{1}{2}$.

तो

$$\omega^{\mu}G_{p,\,q}^{m,\,n}\left[z\omega^{\delta}\,\middle|\,\begin{matrix}a_p\\ b_q\end{matrix}\right]=\frac{\delta^{\mu+\alpha+1/2}(2\pi)^{1/2-1/2\delta}}{\Gamma(a+1)}\sum_{N=0}^{\infty}\frac{\delta^N}{N!}$$

$$\times G_{p+2\delta,\,q+\delta}^{m+\delta,\,n+\delta}\left[z\delta^{\delta}\,\middle|\,\begin{matrix}\triangle(\delta,-\mu-a),\,a_p,\,\triangle(\delta,-\mu)\\ \triangle(\delta,N-\mu),\,b_q\end{matrix}\right]\times{}_1F_1\left[\begin{matrix}-N\\ \alpha+1\end{matrix};\omega\right] \qquad (2.7)$$

या सका वैकल्पिक रूप

$$\omega^{\mu}G_{p,\,q}^{m,\,n}\left[z\omega^{\delta}\,\middle|\,\begin{matrix}a_p\\ b_q\end{matrix}\right]=\frac{\delta^{\mu\;\alpha+1/2}(2\pi)^{1/2-1/2\delta}}{\Gamma(a+1)}\sum_{N=0}^{\infty}\frac{(-1)^N\,\delta^N}{N!}$$

$$\times G_{p+2\delta,q+\delta}^{m,\,n+2\delta}\left[z\delta^{\delta}\,\middle|\,\begin{matrix}\triangle(\delta,-\mu-a),\,\triangle(\delta,-\mu),\,a_p\\ b_q,\,\triangle(\delta,\,N-\mu)\end{matrix}\right]\times{}_1F_1\left[\begin{matrix}-N;\,\omega\\ a+1\end{matrix}\right] \qquad (2.8)$$

उपपत्ति : (2.7) की स्थापना के लिए माना कि

$$\omega^{\mu}\;G_{p,\,q}^{m,\,n}\left[z\,w^{\delta}\,\middle|\,\begin{matrix}a_p\\ b_q\end{matrix}\right]=\sum_{N=0}^{\infty}C_N\,L^{a}{}_N(\omega) \qquad (2.9)$$

(2.7) में दोनों ओर $\omega^{a}e^{-\omega}L_{\beta}{}^{a}(\omega)$ से गुणा करने पर तथा ω के प्रति 0 से ∞ तक समाकलन करने पर, (1.2) का व्यवहार करने तथा लागरे बहुपदियों के लांबिक गुणधर्म से [3, p.293,(5)], हमें

$$C_{\nu}=\frac{\delta^{\nu+\mu+\alpha+1/2}(2\pi)^{1/2-1/2\delta}}{\Gamma(a+\nu+1)}\;G_{p+2\delta,\,q+\delta}^{m+\delta,\,n+\delta}\left[z\delta^{\delta}\,\middle|\,\begin{matrix}\triangle(\delta,\,-\mu-a),\;a_p,\;\triangle(\delta,-\mu)\\ \triangle(\delta,\,\nu-\mu),\qquad b_q\end{matrix}\right] \qquad (2.10)$$

$p+q<2(m+n)$, $|arg\;z|<(m+n-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q)\pi$, $Re\;(\mu+a+\delta b_m)>-1$, $Re\;a>-1$.

प्राप्त होगा।

अब (2.9) में C_N का मान (2.10) से प्रतिस्थापित करने तथा [7, p. 200, (1)], का उपयोग करने पर (2.7) की प्राप्ति होगी।

सर्वसमिका के आधार पर

$$G_{p+2\delta,\,q+\delta}^{m+\delta,\,n+\delta}\left[z\delta^{\delta}\,\middle|\,\begin{matrix}\triangle(\delta,-\mu-a),\,a_p,\,\triangle(\delta,-\mu)\\ \triangle(\delta,N-\mu),\,b_q\end{matrix}\right] \qquad (2.11)$$

$$=(-1)^N G_{p+2\delta,\,q+\delta}^{m,\,n+2\delta}\left[z\delta^{\delta}\,\middle|\,\begin{matrix}\triangle(\delta,-\mu),\,\triangle(\delta,-\mu-a),\,a_p\\ b_q,\,\triangle(\delta,\,N-\mu)\end{matrix}\right],$$

जो G फलन की परिभाषा से स्वतः स्पष्ट है (2·7) से (2·8) परिणाम प्राप्त होगा।

3. **प्रमेय 1.**

(i) माना कि निम्नांकित में से कोई भी ऋणात्मक पूर्ण संख्याएँ नहीं हैं :—

$$b_m+\frac{u-i}{\delta}\ ;\ b_m+\frac{\mu+a_t-1-i}{\delta}\ ;\ \lambda;\ \beta_u-1\ ;\ b_m-a_n,\ \text{जहाँ}\ i=0,1,2,\ldots,\delta-1.$$

(ii) माना कि $p+q<2(m+n)$, $|arg\, z|<(m+n-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q)\pi$,

$$Re\,(\mu+a_t+\delta b_m)>0,\ Re\,(\lambda-a_t)>0,\ Re\,a_t>0,\ Re\,(\delta b_m-c_r)>-1,$$

$$Re\,(\delta b_m-d_s)>-1,\ Re\,(-c_r-\mu)>-1,\ Re\,(-d_s-\mu)>-1.$$

(iii) माना कि δ धनात्मक पूर्ण संख्या है और p, q, r, s, t, u, m तथा n या तो धनात्मक पूर्ण संख्यायें हैं अथवा शून्य हैं।

$$p+\delta r\leqslant q+\delta s-1 \text{ या } p+r\delta=q+s\delta \text{ तथा } |z\omega^{\delta}|<1,$$

$$p+t\delta\leqslant q+(u+1)\delta-1 \text{ या } p+t\delta=q+(u+1)\delta \text{ तथा } |z|<1,$$

$$0\leqslant m\leqslant q;\ 0\leqslant n\leqslant p;\ q+s\geqslant 1.$$

(iv) माना कि $r+u+1=s+t$.

(v) माना कि $0<\omega<1$, $z\neq 0$.

(vi) माना कि $\sum_{j=1}^{s} d_j-\sum_{j=1}^{r} c_j+\sum_{j=1}^{u}\beta_j-\sum_{j=1}^{t} a_j-2\delta b_m<(s-r)(1-\mu)+2\mu+\frac{1}{2}$,

$$1+b_m-\frac{c_r+i}{\delta}>0,\ 1+b_m-\frac{1-\beta_u-\mu+i}{\delta}>0,\ i=0,1,2,\ldots,\delta-1.$$

तो

$$\omega^{\mu}G^{m,\,n+r\delta}_{p+r\delta,\,q+s\delta}\left[z\omega^{\delta}\,\middle|\,\begin{matrix}\triangle(\delta,c_r),a_p\\ b_q,\triangle(\delta,d_s)\end{matrix}\right]=\frac{\Gamma(1-c_r-\mu)\Gamma(\beta_u)}{\Gamma(1-d_s-\mu)\Gamma(a_t)} \tag{3·1}$$

$$\times(2\pi)^{1/2(\delta-1)(r+u-s-t+1)}\,\delta^{\sum_{j=1}^{r}c_j-\sum_{j=1}^{s}d_j+\sum_{j=1}^{t}a_j-\sum_{j=1}^{u}\beta_j}$$

$$+(\mu-\tfrac{1}{2})(r-s)+\tfrac{1}{2}(u-t-1)-\lambda$$

$$\times\sum_{\mathcal{N}=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\mathcal{N}}(\lambda+2\mathcal{N})\Gamma(\lambda+\mathcal{N})}{\mathcal{N}!}$$

$$\times G^{m,\,n+(t+1)\delta}_{p+(t+1)\delta,\,q+(u+2)\delta}\left[z\middle|\begin{matrix}\triangle(\delta,-\mu),\ \triangle(\delta,1-\alpha_t-\mu),\ a_p\\ b_q,\ \triangle(\delta,\mathcal{N}-\mu),\ \triangle(\delta,-\mu-\lambda-\mathcal{N}),\ \triangle(\delta,1-\beta_u-\mu)\end{matrix}\right]$$

$$\times{}_{r+u+2}F_{s+t}\left[\begin{matrix}-\mathcal{N},\lambda+\mathcal{N},1-c_r-\mu,\beta_u;\ \omega\delta^{s-r+t-u-1}\\ \alpha_t,1-d_s-\mu\end{matrix}\right],$$

अथवा इसका वैकल्पिक रूप

$$\omega^{\mu}G^{m,\,n+r\delta}_{p+r\delta,\,q+s\delta}\left[z\omega^{\delta}\middle|\begin{matrix}\triangle(\delta,c_r),a_p\\ b_q,\triangle(\delta,d_s)\end{matrix}\right]=\frac{\Gamma(1-c_r-\mu)\Gamma(\beta_u)}{\Gamma(1-d_s-\mu)\Gamma(\alpha_t)}$$

$$\times(2\pi)^{1/2(\delta-1)(r+u-s-t+1)}\,\delta^{\sum_{j=1}^{r}c_j-\sum_{j=1}^{s}d_j+\sum_{j=1}^{t}\alpha_j-\sum_{j=1}^{u}\beta_j+(\mu-\frac{1}{2})(r-s)+\frac{1}{2}(u-t-1)-\lambda}$$

$$\times\sum_{\mathcal{N}=0}^{\infty}\frac{(\lambda+2\mathcal{N})\Gamma(\lambda+\mathcal{N})}{\mathcal{N}!}G^{m+\delta,\,n+t\delta}_{p+(t+1)\delta,\,q+(u+2)\delta}$$

$$\left[z\middle|\begin{matrix}\triangle(\delta,1-\alpha_t-\mu),a_p,\triangle(\delta,-\mu)\\ \triangle(\delta,\mathcal{N}-\mu),b_q,\triangle(\delta,-\mu-\lambda-\mathcal{N}),\triangle(\delta,1-\beta_u-\mu)\end{matrix}\right]$$

$$\times{}_{r+u+2}F_{s+t}\left[\begin{matrix}-\mathcal{N},\lambda+\mathcal{N},1-c_r-\mu,\beta_u;\ \omega\delta^{s-r+t-u-1}\\ \alpha_t,1-d_s-\mu\end{matrix}\right].\qquad(3.2)$$

उपपत्ति : सर्वप्रथम हम (3·1) को $u=0$, $t=1$, $\alpha_1=\alpha$, के लिये सिद्ध करेंगे । अर्थात्

$$\omega^{\mu}G^{m,\,n+r\delta}_{p+r\delta,\,q+s\delta}\left[z\omega^{\delta}\middle|\begin{matrix}\triangle(\delta,c_r),\ a_p\\ b_q,\ \triangle(\delta,d_s)\end{matrix}\right]=\frac{\Gamma(1-c_r-\mu)}{\Gamma(1-d_s-\mu)\Gamma(\alpha)}$$

$$\times(2\pi)^{1/2(\delta-1)(r-s)}\,\delta^{\sum_{j=1}^{r}c_j-\sum_{j=1}^{s}d_j+(\mu-\frac{1}{2})(r-s)+\alpha-\lambda-1}$$

$$\times\sum_{\mathcal{N}=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}(\lambda+2\mathcal{N})\Gamma(\lambda+\mathcal{N})}{\mathcal{N}!}$$

$$\times G^{m, n+2\delta}_{p+2\delta, q+2\delta}\left[z\middle|\begin{matrix}\triangle(\delta, -\mu), \triangle(\delta, 1-\alpha-\mu), a_p\\ b_q, \triangle(\delta, \mathcal{N}-\mu), \triangle(\delta, -\mu-\lambda-\mathcal{N})\end{matrix}\right]$$

$$\times {}_{r+2}F_{s+1}\left[\begin{matrix}-\mathcal{N}, \lambda+\mathcal{N}, 1-c_r-\mu; \omega\delta^{s-r}\\ a, 1-d_s-\mu\end{matrix}\right].$$

(3.3) की उपपत्ति r तथा s प्राचलों के आगमन पर आधृत है (ध्यान रहे कि दशा $r=s=0$ (2·2) ही परिणाम हैं) यदि हम a को $\alpha+1$ द्वारा प्रतिस्थापित करके $\lambda=\alpha+\beta+1$), रख दें। (3·3) को दोनों ओर $\omega^{-\sigma-\mu}e^{-\lambda\omega}$ से गुणा करने पर, ω के प्रति 0 से ∞ तक समाकलित करने पर तथा

$$\int_0^\infty \omega^{-\sigma}e^{-\lambda\omega}\, G^{m, n+r\delta}_{p+r\delta, q+s\delta}\left[z\omega^\delta\middle|\begin{matrix}\triangle(\delta, c_r)\; a_p\\ b_q, \triangle(\delta, d_s)\end{matrix}\right]d\omega$$

तथा
$$\int_0^\infty \omega^{-\sigma-\mu}\, e^{-\lambda\omega}\; {}_{r+2}F_{s+1}\left[\begin{matrix}-\mathcal{N}, \mathcal{N}+\lambda, 1-c_r-\mu\;;\; \omega\delta^{-r+s}\\ a, 1-d_s-\mu\end{matrix}\right]d\omega,$$

लैपलास परिवर्तों का मान ज्ञात करने पर (1·3) तथा [2, p. 219 (17) का उपयोग करने पर

$$\lambda^{-\mu}\, G^{m, n+(r+1)\delta}_{p+(r+1)\delta, q+s\delta}\left[z\left(\frac{\delta}{\lambda}\right)^\delta\middle|\begin{matrix}\triangle(\delta, \sigma), \triangle(\delta, c_r), a_p\\ b_q, \triangle(\delta, d_s)\end{matrix}\right]$$

$$=\frac{\Gamma(1-c_r-\mu)\;\Gamma(1-\sigma-\mu)}{\Gamma(1-d_s-\mu)}\,(2\pi)^{1/2(\delta-1)(r-s+1)}$$

$$\times\, \delta^{\sum_{j=1}^{r} c_j-\sum_{j=1}^{s} d_j+\sigma+(\mu-\frac{1}{2})(r-s)-\frac{1}{2}+\alpha-\lambda+1}$$

$$\times \sum_{\mathcal{N}=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\mathcal{N}}\,(\lambda+2\mathcal{N})\,\Gamma(\lambda+\mathcal{N})}{\mathcal{N}\,!}$$

$$\times G^{m, n+2\delta}_{p+2\delta, q+2\delta}\left[z\middle|\begin{matrix}\triangle(\delta, -\mu), \triangle(\delta, 1-\alpha-\mu), a_p\\ b_q, \triangle(\delta, \mathcal{N}-\mu), \triangle(\delta, -\lambda-\mu-\mathcal{N})\end{matrix}\right]$$

$$\times {}_{r+3}F_{s+1}\left[\begin{matrix}-\mathcal{N}, \lambda+\mathcal{N}, 1-c_r-\mu, 1-\sigma-\mu; (1/\lambda)\delta^{-r+s}\\ \alpha\;,\; 1-d_s-\mu\end{matrix}\right]$$

अब δ/λ को ω तथा σ को c_{r+1} द्वारा प्रतिस्थापित करने पर r का आगमन पूर्ण होता है। s पर आगमन करने के लिए (3.3) में दोनों ओर $\omega^{1-\mu-\sigma}$ द्वारा गुणा करके ω को δ/λ, प्रतिस्थापित करके तथा (1·3) [2, p. 297, (1)] की सहायता से दोनों ओर का व्युत्क्रम लैपलास परिवर्त लेकर अन्त में σ को d_{s+1} से निर्धारित करते हैं।

(3·3) में G फलन को हाइपरज्यामितीय फलन में परिवर्तित करने के लिये $m=1$, $n=p$, $b_1=0$ रखकर, a_p को $1-a_p$, q को $q+1$ तथा b_{j+1} को $1-b_j$ $(j=1, 2, \ldots, q)$, c_r को $1-c_r$, d_s को $1-d_s$, द्वारा प्रतिस्थापित करके, [3, p. 439, (3)] का उपयोग करके सरलीकरण पर

$$\omega^{\mu}{}_{p+r\delta}F_{q+s\delta}\left[\begin{matrix}a_p, \triangle(\delta, c_r); z\omega^{\delta}\\ b_q, \triangle(\delta, d_s)\end{matrix}\right]$$

$$=\frac{(c_r)_{-\mu}(\alpha)_{\mu}}{(d_s)_{-\mu}}\delta^{\mu(r-s)}\sum_{\mathcal{N}=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\ (\lambda+2\mathcal{N})}{\mathcal{N}!\,(\mathcal{N}+\lambda)_{\mu+1}}$$

$$\times{}_{p+2\delta}F_{q+2\delta}\left[\begin{matrix}a_p, \triangle(\delta, 1+\mu), \triangle(\delta, \alpha+\mu); z\\ b_q, \triangle(\delta, 1+\mu-\mathcal{N}), \triangle(\delta, 1+\mu+\lambda+\mathcal{N})\end{matrix}\right]$$

$$\times{}_{r+2}F_{s+2}\left[\begin{matrix}-\mathcal{N}, \mathcal{N}+\delta, c_r-\mu; \omega\delta^{s-r}\\ \alpha, d_s-\mu\end{matrix}\right] \tag{3.8}$$

प्राप्त करते हैं। पहले (3·8) में $\delta=1$, $z=0$, रख कर, r को $r+u$ से प्रतिस्थापित करके माना कि $c_{r+\lambda}=\beta_{\lambda}+\mu$, $\lambda=1, 2, \ldots, u$ तथा c_{λ} को $c_{\lambda}+\zeta\delta$, $\lambda=1, 2, \ldots, r$. से प्रतिस्थापित करते हैं। अब हम s को $s+t$ से प्रतिस्थापित करके $d_{s+\lambda}=\alpha_{\lambda}+\mu$, $\lambda=1, 2, \ldots, t$ मानते हुये d_{λ} को $d_{\lambda}+\zeta\delta$, $\lambda=1, 2, \ldots, s$ से प्रतिस्थापित करते हैं। फिर ω को $\alpha\omega$ द्वारा प्रतिस्थापित करके $\alpha\to\infty$ मानते हैं। अन्त में μ को $\mu+\zeta\delta$, c_r को $1-c_r$, d_s को $1-d_s$ तथा ω को $\omega\delta^{s-r+t-u-1}$, से प्रतिस्थापित करते हैं तो

$$\omega^{\mu+\zeta\delta}=\frac{(1-c_r+\zeta\alpha)_{-\mu-\zeta\delta}(\beta_u+\mu+\zeta\alpha)_{-\mu-\zeta\delta}}{(1-d_s+\zeta\alpha)_{-\mu-\zeta\delta}(\alpha_t+\mu+\zeta\delta)_{-\mu-\zeta\delta}}\delta^{(\mu+\zeta\delta)(r-s+u-t+1)}$$

$$\times\sum_{\mathcal{N}=0}^{\infty}\frac{(2\mathcal{N}+\lambda)\,(-\mu-\zeta\delta)_{\mathcal{N}}}{\mathcal{N}!\,(\mathcal{N}+\lambda)_{\mu+\zeta\delta+1}}\times{}_{r+u+2}F_{s+t}\left[\begin{matrix}-\mathcal{N}, \lambda+\mathcal{N}, 1-c_r-\mu, \beta_u; \omega\delta^{s-r+t-u-1}\\ \alpha_t, 1-d_s-\mu\end{matrix}\right] \tag{3.9}$$

प्राप्त होता है। अब (3·1) को दिखाने के लिए (3·1) के दोनों ओर के G फलन को मेलिन बार्नीज़ प्रकार के समाकल [1 p.207 (1)], के रूप में व्यक्त करने पर, तथा बाईं ओर (3·9) का प्रयोग करने पर कुछ सरलीकरण के पश्चात् (3·1) में समानता आ जाती है।

(2·6) सर्वसमिका की सहायता से (3·2) परिणाम की प्राप्ति (3·1) से की जाती है।

उक्त दशाओं में हम [4] तथा [5] की सहायता से (3·1) के अभिसरण की संक्षेप में विवेचना करेंगे।

अभिसरण के लिये आवश्यक प्रतिबन्धों एवं G फलनों तथा हाइपरज्यामितीय फलनों की परिभाषाओं का परिचय (i) से लेकर (iv) द्वारा मिल जाता है। (i) तथा (iii) प्रतिबन्धों से यह भी निश्चित हो जाता है कि (3·1) के गामा-फलन भी परिमित हैं।

प्रसार के अभिसरण के होने के लिए (v) तथा (vi) में दिए गए प्रतिबन्ध प्रर्याप्त हैं। ये प्रतिबन्ध अनन्त श्रेणियों के अभिसरण से उत्पन्न [4] होते हैं और G फलन के दीर्घ N के लिये आगामी आचरण पर तथा (3.1) के दाहिनी ओर के हाइपरज्यामितीय फलन पर आधारित हैं। यदि प्रतिबन्ध (iv) की तुष्टि नहीं होती तो [5] में दिये गये विश्लेषण के कारण प्रसार अपसरण करता है। प्रसार के अपसरण करने पर भी श्रेणी को उपगामी रूप दिया जा सकता है।

प्रमेय 2.

(i) माना कि निम्नांकित में से कोई भी ऋणात्मक पूर्ण संख्या नहीं है :—

$$b_m+\frac{\mu-i}{\delta}\,;\; b_m+\frac{\mu+\alpha_t-1-i}{\delta}\,;\; \beta_\mu-1\,;\; b_m-a_n,$$

जहाँ $i=0, 1, 2, \ldots, \delta-1$

(ii) माना कि $p+q<2(m+n)$, $|\arg z|<(m+n-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q)\pi$,

$\mathrm{Re}\,(\mu+\alpha_t+\delta b_m)>0$, $\mathrm{Re}\,\alpha_t>0$, $\mathrm{Re}\,(\delta b_m-c_r)>-1$, $\mathrm{Re}\,(\delta b_m-d_s)>-1$,

$\mathrm{Re}\,(-c_r-\mu)>-1$, $\mathrm{Re}\,(-d_s-\mu)>-1$.

(iii) माना कि δ धनात्मक पूर्ण संख्या है तथा p, q, r, s, t, u, m तथा n या तो धनात्मक पूर्ण संख्या हैं या शून्य हैं

$$p+r\delta<q+s\delta-1 \text{ या } p+r\delta=q+s\delta \text{ तथा } |z\omega^\delta|<1,$$

$$p+t\delta\leqslant q+u\delta-1,$$

$$0\leqslant m\leqslant q;\quad 0\leqslant n\leqslant p;\quad q+s\geqslant 1.$$

(iv) माना कि $r+u+1=s+t$.

(v) माना कि $0<\omega<\infty$, $z\neq 0$.

(vi) माना कि $\sum_{j=1}^{s} d_j-\sum_{j=1}^{r} c_j+\sum_{j=1}^{u}\beta_j-\sum_{j=1}^{t}\alpha_j-2\delta b_m<(s-r)(1-\mu)+2\mu-\frac{1}{2}$,

$$1+b_m-\frac{c_r+i}{\delta}>0,\; 1+b_m-\frac{1-\beta_u-\mu+i}{\delta}>0,\; i=0, 1, 2, \ldots\ldots, \delta-1.$$

$$\omega^\mu G^{m,\,n+r\delta}_{p+r\delta,\,q+s\delta}\left[z\omega^\delta\left|\begin{matrix}\triangle(\delta, c_r), a_p\\ b_q, \triangle(\delta, d_s)\end{matrix}\right.\right]=\frac{\Gamma(1-c_r-\mu)\Gamma(\beta_u)}{\Gamma(1-d_s-\mu)\Gamma(\alpha_t)}$$

$$\times (2\pi)^{1/2(\delta-1)(r+u-s-t)}\ \delta^{\sum_{j=1}^{r} c_j - \sum_{j=1}^{s} d_j + \sum_{j=1}^{t} \alpha_j - \sum_{j=1}^{u} \beta_j + (\mu-\frac{1}{2})(r-s+1)+\frac{1}{2}(s-t+1)}$$

$$\times \sum_{\mathcal{N}=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\mathcal{N}}\delta^{\mathcal{N}}}{\mathcal{N}!}\ G^{m,\ n+(t+1)\delta}_{p+(t+1)\delta,\ q+(u+1)\delta}\left[z\,\delta^{\delta} \middle| \begin{matrix} \triangle(\delta,-\mu),\ \triangle(\delta, 1-\alpha_t-\mu),\ a_p \\ b_q,\ \triangle(\delta, 1-\beta_u-\mu),\ \triangle(\delta, \mathcal{N}-\mu) \end{matrix} \right]$$

$$\times\ {}_{r+u+1}F_{s+t}\left[\begin{matrix} -\mathcal{N},\ 1-c_r-\mu,\ \beta_u; \\ \alpha_t,\ 1-d_s-\mu \end{matrix}\ \omega\delta^{s-r+t-u-1} \right] \tag{3.10}$$

अथवा इसका वैकल्पिक रूप

$$\omega^{\mu} G^{m,\ n+r\delta}_{p+r\delta,\ q+s\delta}\left[z\omega^{\delta} \middle| \begin{matrix} \triangle(\delta, c_r),\ a_p \\ b_q,\ \triangle(\delta, d_s) \end{matrix} \right] = \frac{\Gamma(1-c_r-\mu)\Gamma(\beta_u)}{\Gamma(1-d_s-\mu)\Gamma(\alpha_t)}$$

$$\times (2\pi)^{1/2(\delta-1)(r+u-s-t)}\ \delta^{\sum_{j=1}^{r} c_j - \sum_{j=1}^{s} d_j + \sum_{j=1}^{t} \alpha_j - \sum_{j=1}^{u} \beta_j + (\mu-\frac{1}{2})(r-s+1)+\frac{1}{2}(s-t+1)}$$

$$\times \sum_{\mathcal{N}=0}^{\infty} \frac{\delta^{\mathcal{N}}}{\mathcal{N}!}\ G^{m+\delta,\ n+t\delta}_{p+(t+1)\delta,\ q+(u+1)\delta}\left[z\delta^{\delta} \middle| \begin{matrix} \triangle(\delta, 1-\alpha_t-\mu),\ a_p,\ \triangle(\delta,-\mu) \\ \triangle(\delta, \mathcal{N}-\mu),\ b_q,\ \triangle(\delta, 1-\beta_u-\mu) \end{matrix} \right]$$

$$\times\ {}_{r+u+1}F_{s+t}\left[\begin{matrix} -\mathcal{N},\ 1-c_r-\mu,\ \beta_u; \\ \alpha_t,\ 1-d_s-\mu \end{matrix}\ w\delta^{s-r+t-u-1} \right] \tag{3.11}$$

उपपत्ति : इस प्रमेय की उपपत्ति प्रमेय 1 की भाँति है और वह प्रमेयिका 1 पर आधृत न होकर प्रमेयिका 2 पर आधृत है।

विशिष्ट दशाएँ

1. E—**फलनों का प्रसार** (a) **प्रथम प्रसार**

(i) माना कि निम्नांकित में से कोई भी ऋणात्मक पूर्ण संख्या नहीं है

$$\frac{\mu-1}{\delta};\ \frac{\mu+\alpha_t-1-i}{\delta};\ \lambda;\ \beta_u-1;\ a_n-1,\ \text{जहाँ } i=0, 1, 2, \ldots, \delta-1.$$

(ii) माना कि $q<p+1$, $|arg\ z|<(p-q+1)\pi/2$, Re $(\mu+\alpha_t)>0$,

$$\text{Re }(\lambda-\alpha_t)>0,\ \text{Re }\alpha_t>0,\ \text{Re }c_r>0,\ \text{Re }d_s>0,$$

$$\text{Re }(c_r-\mu)>0,\ \text{Re }(d_s-\mu)>0.$$

(iii) माना कि δ एक धनात्मक पूर्ण संख्या है तथा p, q, r, s, t तथा u पूर्ण संख्याएँ या शून्य हैं।

$$p+r\delta<q+s\delta \text{ या } p+r\delta+1 \text{ तथा } |z\omega^{\delta}|>1,$$

$$p+t\delta<q+(u+1)\delta \text{ या } p+t\delta=q+(u+1)\delta+1 \text{ तथा } |z|>1,$$

$$0\leqslant q;\ 0\leqslant p;\ q+s\geqslant 0.$$

(iv) माना कि $r+u+1=s+t$.

(v) माना कि $1<\omega<\infty$.

(vi) माना कि $\sum_{j=1}^{r} c_j-\sum_{j=1}^{s} d_j-\sum_{j=1}^{u} \beta_j-\sum_{j=1}^{t}\alpha_j<(r-s)\mu+2\mu+\frac{1}{2}$,

$$1-\frac{1-c_r+i}{\delta}>0,\ 1-\frac{1-\beta_u-\mu+i}{\delta}>0,\ i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \delta-1$$

तो

$$\omega^{\mu}E\left[\begin{matrix}a_p, \triangle(\delta,\ c_r) : z\omega^{\delta}\\ b_q: \triangle(\delta,\ d_s)\end{matrix}\right]$$

$$=\frac{\Gamma(c_r-\mu)\Gamma(\beta_u)}{\Gamma(d_s-\mu)\Gamma(\alpha_t)}\times(2\pi)^{1/2(\delta-1)(r+u-s-t+1)}$$

$$\times\ \delta^{\sum_{j=1}^{s} d_j-\sum_{j=1}^{r} c_j+\sum_{j=1}^{t} \alpha_j-\sum_{j=1}^{u}\beta_j+(\mu+\frac{1}{2})(r-s)+\frac{1}{2}(u+t-1)-\lambda}$$

$$\times\sum_{\mathcal{N}=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(\lambda+2\mathcal{N})\Gamma(\lambda+\mathcal{N})}{\mathcal{N}!}$$

$$\times E\left[\begin{matrix}a_p,\ \triangle(\delta,\ \mu+1),\ \triangle(\delta,\ \alpha_t+\mu)\ : z\\ b_q,\ \triangle(\delta,\ 1+\mu-\mathcal{N}),\ \triangle(\delta,\ 1+\mu+\lambda+\mathcal{N}),\ \triangle(\delta,\beta_u+\mu)\end{matrix}\right]$$

$$\times\ {}_{r+u+2}F_{s+t}\left[\begin{matrix}-\mathcal{N},\ \lambda+\mathcal{N},\ c_r-\mu,\ \beta_u;\ \omega^{-1}\delta^{s-r+t-u-1}\\ \alpha_t,\ d-\mu\end{matrix}\right] \tag{4.1}$$

उपपत्ति : (3·1) में $m=1$, $n=p$, $b_1=0$, रखने पर, q को $q+1$ तथा b_{j+1} को $b_j(j=1, 2, \ldots, q)$, द्वारा प्रतिस्थापित करने पर, [1, p. 209(9)] का तथा [3, p. 444, (2)] उपयोग करने पर z को z^{-1} द्वारा, ω को ω^{-1} द्वारा, $1-a_p$ को a_p द्वारा, $1-b_q$ को b_q द्वारा, $1-c_r$ को c_r द्वारा तथा $1-d_s$ को d_s द्वारा प्रतिस्थापित करने पर (4·1) परिणाम की प्राप्ति होगी।

(b) **द्वितीय प्रसार**

(i) माना कि निम्नांकित में से कोई भी ऋणात्मक पूर्ण संख्या नहीं है

$$\frac{\mu-i}{\delta};\ \frac{\mu+\alpha_t-1+i}{\delta};\ \beta_u-1;\ a_n-1,\ \text{जहाँ } i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \delta-1.$$

(ii) माना कि $q<p+1$, $|\arg z|<(p-q+1)\,\pi/2$, $\text{Re}\,(\mu+\alpha_t)>0$,

$\text{Re}\,\alpha_t>0$, $\text{Re}\,c_r>0$, $\text{Re}\,d_s>0$, $\text{Re}\,(c_r-\mu)>0$, $\text{Re}\,(d_s-\mu)>0$.

(iii) माना कि δ धनात्मक पूर्ण संख्या है तथा p, q, r, s, t तथा u या तो धनात्मक पूर्ण संख्यायें हैं या शून्य

$p+r\,\delta\leqslant q+s\delta$ या $p+r\delta=q+s\delta+1$ तथा $p+t\delta\leqslant q+u\delta$,

$0\leqslant q;\ 0\leqslant p;\ q+s\geqslant 0.$

(iv) माना कि $r+u+1=s+t$

(v) माना कि $0<\omega<\infty$.

(vi) माना कि $\sum_{j=1}^{r} c_j-\sum_{j=1}^{s} d_j+\sum_{j=1}^{u}\beta_j-\sum_{j=1}^{t}\alpha_j<(r-s)\mu+2\mu-\frac{1}{2}$,

$$1-\frac{1-c_r+i}{\delta}>0,\ 1-\frac{1-\beta_u-\mu+i}{\delta}>0,\ i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \delta-1.$$

तो

$$\omega^{\mu}\, E\left[\begin{matrix}a_p,\ \triangle(\delta,\ c_r):\ z\omega^{\delta}\\ b_q,\ \triangle(\delta,\ d_s)\end{matrix}\right]=\frac{\Gamma(c_r-\mu)\ \Gamma(\beta\mu)}{\Gamma(d_s-\mu)\ \Gamma(\alpha_t)}$$

$$\times\ (2\pi)^{1/2(\delta-1)(r+u-s-t)}\ \delta^{\sum_{j=1}^{s} d_j-\sum_{j=1}^{r} c_j+\sum_{j=1}^{t}\alpha_j-\sum_{j=1}^{u}\beta_j+(\mu+\frac{1}{2})(r-s)+\mu+\frac{1}{2}(s-t)}$$

$$\times\sum_{\mathcal{N}=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\mathcal{N}}\delta^{\mathcal{N}}}{\mathcal{N}!}E\left[\begin{matrix}a_p,\triangle(\delta,1+\mu),\ \triangle(\delta,\ \alpha_t+\mu):z\,\delta^{\delta}\\ b_q,\triangle(\delta,1+\mu-\mathcal{N}),\triangle(\delta,\beta_\mu+\mu)\end{matrix}\right]$$

$$\times\,{}_{r+u+1}F_{s+t}\left[\begin{matrix}-\mathcal{N},\ c_r-\mu,\ \beta_u;\ \omega^{-1}\,\delta^{s-r+t-u-1}\\ \alpha_t,\ d_s-\mu\end{matrix}\right] \tag{4·2}$$

उपपत्ति: (3·10), में $m=1$, $n=p$, $b_1=0$, रखने पर तथा q को $q+1$ द्वारा तथा b_{i+1} को b_j ($j=1,\ 2,\ \ldots,\ q$), द्वारा प्रतिस्थापित करके [1, p. 209, (9)] तथा [3, p. 444, (2)] का उपयोग करते हुये z को z^{-1} द्वारा, ω को ω^{-1}, $1-a_p$ को a_p, $1-b_q$ को b_q, $1-c_r$ को c_r, $1-d_s$ को d_s द्वारा प्रतिस्थापित करने पर (4·2) परिणाम की प्राप्ति होगी ।

2. (2·2) में $\delta=1$, $m=q=1$, $n=p=0$, $b_1=0$, रखने पर, $G_{01}^{10}\left[z\middle|_{0}^{-}\right]=e^{-z}$, का उपयोग करने पर ज्ञात परिणाम [9, p. 352, (1·3)] प्राप्त होगा।

3. (3·1) में $\delta=1$, $\mu=0$, रखने पर ज्ञात परिणाम [9, p.359, (2·2)] प्राप्त होगा।

4. (3·1) में $\delta=1$, $b_1=0$, $m=1$, $n=p$, रखने से, a_p को $1-a_p$, q को $q+1$ तथा b_{j+1} को $1-b_j$ $(j=1, 2, ..., q)$, c_r को $1-c_r$, d_s को $1-d_s$, द्वारा प्रतिस्थापित करने पर [3, p. 439, (3)] का उपयोग करने पर तथा सरलीकरण से ज्ञात परिणाम [9, p.353,(1.6)] की प्राप्ति होगी।

5. (3·10) में $\delta=1$, $\mu=0$ प्रतिस्थापित करने पर यह ज्ञात परिणाम [9, p. 360, (2.3)] में परिणत हो जाता है।

6. (3.10) में $\delta=1$, $b_1=0$, $m=1$, $n=p$, रखने पर, a_p को $1-a_p$, q को $q+1$ तथा b_{j+1} को $1-b_j$ $(j=1, 2, ..., q)$, c_r को $1-c_r$, d_s को $1-d_s$ द्वारा प्रतिस्थापित करने पर [3, p. 439, (3)] का उपयोग करने पर तथा सरलीकरण पर ज्ञात परिणाम [9, p. 358, (1.18)] की प्राप्ति होगी।

7. (3.10), में $\delta=1$, $\mu=0$, $t=u=0$ तथा $s=r$ रखने पर ज्ञात परिणाम [6, p.43, (51)] प्राप्त होता है जो माइजर द्वारा प्राप्त सर्वाधिक सामान्य प्रसारों में से एक है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

मैं डा० वी० एम० भिसे का मार्गदर्शन के हेतु तथा डा० एस० एम० दासगुप्त का सुविधायें प्रदान करने के हेतु आभारी हूँ।

निर्देश

1. एर्डेल्यी, ए०। Higher Transcendental Functions, **मैकग्राहिल, न्यूयार्क,** 1953, **1**.

2. वही। Tables of Integral Transforms, **मैकग्राहिल, न्यूयार्क,** 1954, **1**.

3. वही। Tables of Integral Transforms, **मैकग्राहिल, न्यूयार्क,** 1954, **2**.

4. फील्ड्स, जे० एल० तथा लूक, वाई० एल०। **जर्न० मैथ० एना० ऐप्ला०,** 1963, **6**, 394-403.

5. वही। **वही**, 1963, **7**, 440-45.

6. माइजर, सी० एस०। Nedrel. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A, 1953, **56**, 43-49.

7. रेनविले, ई० डी०। Special Functions **मैकमिलन तथा कम्पनी लिमिटेड, न्यूयार्क**, 1960.

8. सक्सेना, आर० के०। **जर्न० इण्डि० मैथ० सोसा०**, 1964, **3-4**, 197-202.

9. विम्प, जे० तथा ल्यूक, वाई० एल०। Rendiconti Del Circolo Mathematico Di Palermo, Serie II, 1962, XI, 351-366.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

Vol. 11 October 1968 No. 4

[The Research Journal of the Hindi Science Academy]

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

भाग 11 | अक्टूबर 1968 | संख्या 4

विषय-सूची

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 11, No. 4, Oct. 1968, Pages 193-194

तेंदू की लकड़ी के चटचटाहट के गुण का अध्ययन

कृष्ण बहादुर तथा बृजबलसिंह
रसायन विभाग, प्रयाग विश्वविद्यालय

[प्राप्त—मई 15, 1968]

सारांश

तेंदू की लकड़ी से जलाने पर चटचटाहट होती है। इस लकड़ी को जब $5N$ हाइड्रोक्लोरिक अम्ल के साथ निष्कर्षित किया गया तो इसका यह गुण कम हो गया। निष्कर्षित द्रव्य में मैग्नीशियम पाया गया। अन्य लकड़ियों को जलाकर उनकी राख की मात्रा और गुणों की तुलना तेंदू की लकड़ी से की गई तो तेंदू की लकड़ी में राख और मैग्नीशियम की मात्रा सर्वाधिक पाई गई। इस लकड़ी में दूसरी लकड़ियों की अपेक्षा ज्यादा चटचटाहट का गुण पाया गया। उपर्युक्त प्रयोगफल से पता चलता है कि तेंदू की लकड़ी के चटचटाहट का गुण उसमें उपस्थित मैग्नीशियम तथा राख की अधिक मात्रा ही है।

Abstract

Study of cracking in Diospyros melonoxylon wood. *By* Krishna Bahadur and Brij Bal Singh, Chemistry Department, University of Allahabad, Allahabad.

Diospyros melonoxylon wood produces cracking sound when burnt. This wood on being extracted with $5N$ HCl was found to reduce its cracking property. The extracted substance was found to contain magnesium. Several other woods were extracted for their ash content. The percentage of ash in the Diospyros melonoxylon was found to be maximum. It is suggested, therefore, that higher percentage of ash and magnesium in this wood is responsible for its cracking property.

तेंदू की लकड़ी को जलाने पर जोरों से चटचटाहट होती है। इस चटाचटाहट का गुण किस अवयव से होता है इसका परीक्षण किया गया।

प्रयोगात्मक

तेंदू की लकड़ी में से पेट्रोलियम ईथर, बेंजीन और ऐल्कोहल द्वारा कार्बनिक यौगिक निष्कर्षित किये गये और इसके बाद इस लकड़ी का परीक्षण किया गया [1]। यह देखा गया कि फिर भी इसमें चट-

चटाहट का गुण अवशेष है। इस लकड़ी के कोयले का भी परीक्षण चटचटाहट के गुण के लिए किया गया किन्तु इस कोयले में भी चटचटाहट का गुण पाया गया। इस प्रयोग से पता चलता है कि कार्बनिक यौगिक की उपस्थिति या अनुपस्थिति चटचटाहट के गुण पर निर्भर नहीं करती है।

इस लकड़ी को 48 घंटे तक $5N$ हाइड्रोक्लोरिक अम्ल में रखा गया। इसके बाद इसे छान लिया गया और लकड़ी को अधिक पानी की मात्रा में धोया गया और फिर इस लकड़ी में चटचटाहट का गुण देखा गया। यह ज्ञात हुआ कि अभी भी इसमें यह गुण विद्यमान है। छनित में अधिक मात्रा में सोडियम हाइड्राक्साइड मिलाने पर एक श्वेत पदार्थ प्राप्त हुआ। इस श्वेत पदार्थ को छान कर तथा पानी से धो कर पृथक कर लिया गया। श्वेत पदार्थ का परीक्षण करने पर पता चला कि इसमें मैग्नीशियम अकार्बनिक तत्व के रूप में हैं। यह पदार्थ गरम करने पर पहले काला हो जाता है, इसके पश्चात् सफेद हो जाता है जिससे पता चलता है कि इसमें कार्बनिक तत्व भी है। कार्बनिक अंश चटचटाहट के लिए उत्तरदायी नहीं है इसलिए अकार्बनिक मैग्नीशियम ही इस चटचटाहट का कारण हो सकता है। इसकी पुष्टि निम्नांकित लकड़ियों को जला कर उनकी राख तथा मैग्नीशियम की मात्रा ज्ञात करके की गई।

सारणी 1

लकड़ियाँ	प्रतिशत राख	प्रतिशत मैग्नीशियम	गुण
तेंदू	15	3–25	तीव्र चटचटाहट
साखू	1	–	–
लसोड़ा	3–2	–	–
शीशम	4	–	मन्द चटचटाहट

उपर्युक्त प्रयोगफल से पता चलता है कि तेंदू की लकड़ी में राख की मात्रा सबसे अधिक है। इस राख में अकार्बनिक मैग्नीशियम की मात्रा 3–25 प्रतिशत है। इससे यह भी ज्ञात होता है कि जिस लकड़ी में राख की मात्रा जितनी अधिक होगी चटचटाहट का गुण भी उतना ही अधिक होगा, और जिसमें राख की मात्रा जितनी कम होगी उसमें चटचटाहट का गुण भी उतना कम होगा। श्वेत पदार्थ में मैगनिशियम की मात्रा 25–5 प्रतिशत है।

निर्देश

1. रमया, टी०एस० और राव, एल०आर०। **इन्डियन जर्न० अप्लाइड केमिस्ट्री,** 1963, **26**(1-2), 29-30.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 11, No. 4, Oct. 1968, Pages 195-200

कर्णातीत तरंगों द्वारा Ce^{4+} तथा Mn^{7+} का अवकरण

बद्री प्रसाद
रसायन विभाग, प्रयाग विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

[प्राप्त—मई 24, 1968]

सारांश

मुलर्ड कर्णातीत तरंग उत्पादक E-7562 (1-Mc/S) द्वारा $CeSO_4$ एवं $KMnO_4$ विलयनों का अवकरण देखा गया। अवकरण की क्रिया शून्य कोटि की पाई गई। वेग स्थिरांक k_0 के मान भी ज्ञात किये गये। तरंगों की तीव्रता का प्रभाव देखने पर पता चला कि अधिक तीव्र तरंगों से अवकरण जल्दी होता है। $KMnO_4$ विलयन के अवकरण पर pH का प्रभाव देखने से ज्ञात हुआ कि निम्न pH पर अवकरण शीघ्रता से होता है।

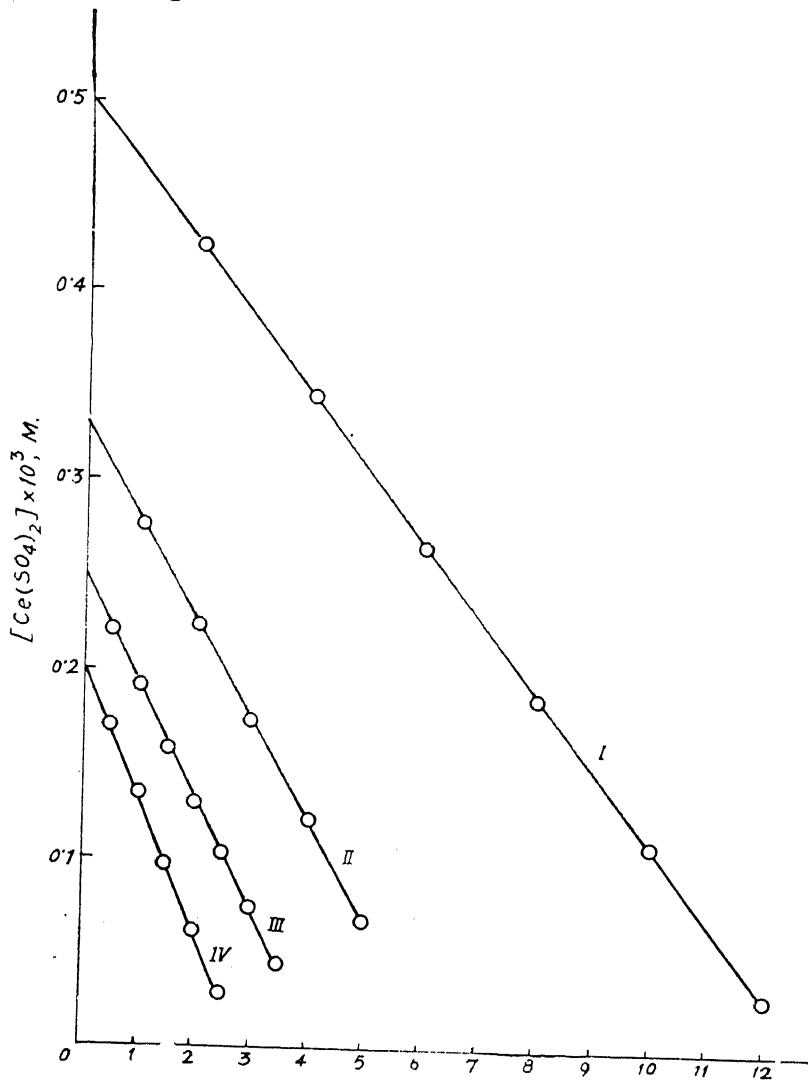
Abstract

Reduction of Ce^{4+} and Mn^{7+} by ultrasound. *By* Badri Prasad, Chemistry Department, University of Allahabad, Allahabad.

Mullard's high frequency ultrasonic generator type E-7562 (1 Mc/S) has been used for studying the ultrasonic reduction of ceric sulphate and potassium permanganate solutions. The kinetics of reduction of Ce^{4+} and Mn^{7+} were found to be of zero order. The values of k_0 (velocity constant), as found graphically is presented. Effect of intensity was also investigated. At high intensity, the reduction yield was higher. Effect of pH in case of $KMnO_4$ was seen. $KMnO_4$ reduction was faster at low pH.

कर्णातीत तरंगों द्वारा कई प्रकार की अभिक्रियाएँ सम्पन्न की जा सकती हैं। इनमें से अकार्बनिक लवणों के अवकरण के प्रति आजकल काफी रुचि ली जा रही है[1-5]। इस शोध निबन्ध में Ce^{4+} और Mn^{7+} के अवकरण का अध्ययन कर्णातीत तरंगों द्वारा किया गया है।

प्रयोगात्मक

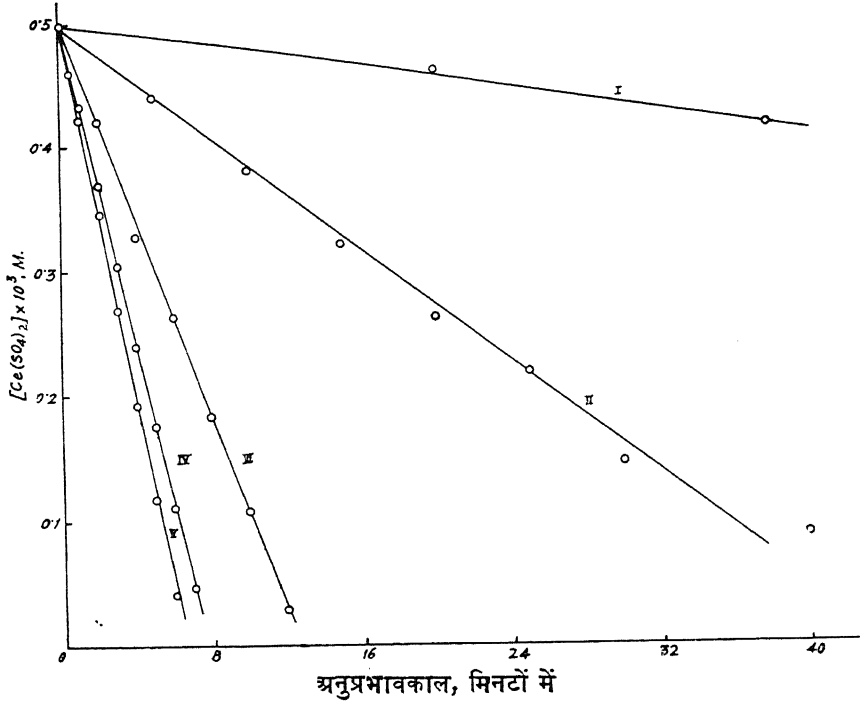
वैश्लेषिक कोटि के $CeSO_4$ और $KMnO_4$ प्रयोग में लाये गये। जल को दोबारा आसवित करके विलयन बनाने में प्रयुक्त किया गया।

चित्र 1. $CeSO_4$ विलयन (pH=0·5) का कर्णातीत तरंगों द्वारा अवकरण

वक्र I. $0·50 \times 10^{-3}$ *M*,

II. $0·33 \times 10^{-3}$ *M*,

III. $0·25 \times 10^{-3}$ *M*,

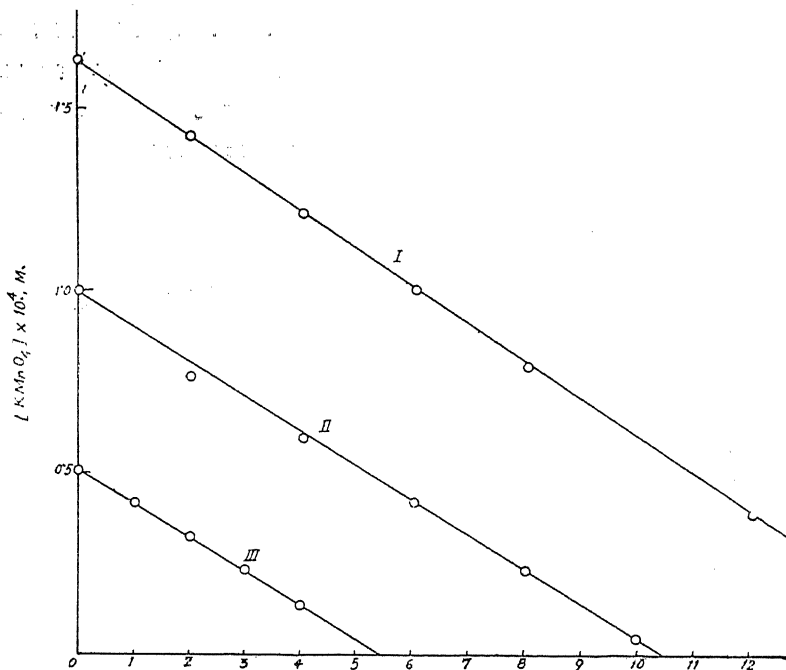
IV. $0·20 \times 10^{-3}$ *M*.

एक मेगा चक्र प्रति सेकन्ड की तीव्र कर्णातीत तरंगें मुलर्ड के उच्च आवृति वाले उत्पादक से प्राप्त की गईं। बेरियम टाइटैनेट का ट्रान्सड्यूसर प्रयोग में लाया गया। एक 250 मि०ली० की चौड़े मुँह वाली जेना बोतल, जिसकी पेंदी बहुत पतली थी, अभिक्रिया पात्र के रूप में प्रयुक्त की गई। बोतल को पानी से भरे अवगाह में, जिसका ताप 25±1°C पर स्थिर रक्खा गया था, लटका दिया गया। सारी क्रिया एक कर्णातीत तीव्रता (64·8 वाट) पर की गई सिवाय जब कि कर्णातीत तीव्रता का प्रभाव देखा गया। जिन प्रयोगों में कोटरीकरण (Cavitation) वन्द हो गया था उन्हें छोड़ दिया गया। प्रत्येक बार 25 मि०ली० विलयन को कर्णातीत तरंगों द्वारा अनुप्रभावित किया गया।

चित्र 2. $0{\cdot}50 \times 10^{-3}$ M $CeSO_4$ विलयन (pH=0·5) पर कर्णातीत तरंगों की तीव्रता का प्रभाव

वक्र			
	I	=	38·8 वाट
	II	=	51·2 ,,
	III	=	64·8 ,,
	V	=	96·8 ,,

$Ce(SO_4)$ (λ_{max}=320 m μ) एवं $KMnO_4$ (λ_{max}=526 m μ) विलयनों की सान्द्रता बेकमेन डी० यू० स्पेक्ट्रोफोटोमीटर के द्वारा जिसके सेल की मोटाई 1 सेमी० थी, प्रकाशीय घनत्व (Optical density) निकाल कर ज्ञात की गई। प्राप्त परिणामों को चित्र 1–5 द्वारा व्यक्त किया गया है।

फल तथा विवेचना

चित्र 1, 2 तथा 3 से यह पता चलता है कि कर्णातीत तरंगों द्वारा $CeSO_4$ और $KMnO_4$

अनुप्रभावकाल, मिनटों में

चित्र 3. $KMnO_4$ विलयन (pH=1) का कर्णातीत तरंगों द्वारा अवकरण

वक्र I = $1·66 \times 10^{-4}$ *M*
II = $1·00 \times 10^{-4}$ *M*
III = $0·50 \times 10^{-4}$ *M*

का अवकरण शून्य कोटिक (Zero Order) है। k_0 शून्य कोटिक स्थिरांक के मान सारणी 1, 2, तथा 3 में दिये गए हैं।

सारणी 1 $CeSO_4$ विलयन का अवकरण

$CeSO_4$ की प्रारम्भिक सान्द्रता (मोल / लीटर)	k_0 (मोल / मिनट)
$0·50 \times 10^{-3}$	1·3333
$0·33 \times 10^{-3}$	1·7894
$0·25 \times 10^{-3}$	2·0000
$0·20 \times 10^{-3}$	2·3684

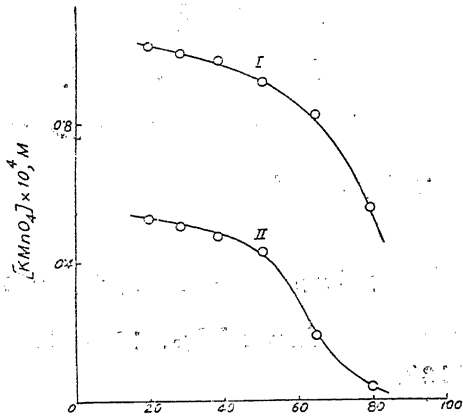
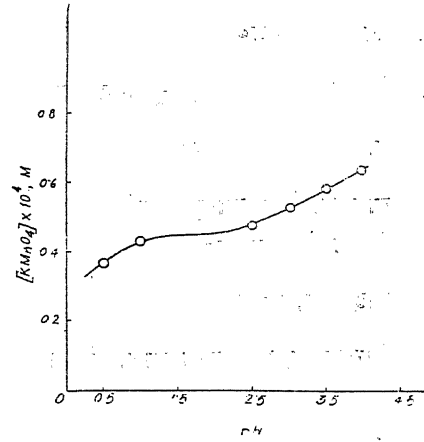
सारणी 2 विभिन्न तीव्रताओं पर 0.5×10^{-3} M $CeSO_4$ विलयन का अवकरण

तीव्रता	k_0 (मोल / मिनट) वक्र द्वारा
28·8 वाट	1·3333
51·2 ,,	0·7666
64·8 ,,	2·6666
80·0 ,,	4·5714
96·8 ,,	5·2000

सारणी 3 $KMnO_4$ विलयन का अवकरण

$KMnO_4$ की सान्द्रता (मोल / लीटर)	k_0 (मोल / मनिट) वक्र द्वारा
1.66×10^{-4}	0·6792
1.00×10^{-4}	0·6216
0.50×10^{-4}	0·6060

सारणी 2 से यह स्पष्ट है कि तीव्रता बढाने से k_0 का मान भी बढ़ता जाता है, अर्थात् $CeSO_4$ का अवकरण तीव्र होता जाता है। यही बात $KMnO_4$ विलयन के लिये भी सत्य है (चित्र 4)।

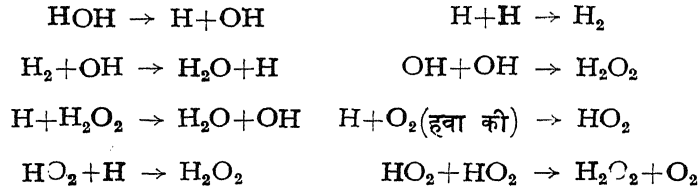
चित्र 5 में pH का प्रभाव, $KMnO_4$ के अवकरण पर देखा गया है। निम्न pH पर कर्णातीत तरंगों द्वारा अवकरण तीव्र गति से होता है अर्थात् H^+ आयन इस क्रिया में सहायता पहुँचाते हैं।

चित्र 4. $KMnO_4$ विलयन (pH=1) पर कर्णातीत तरंगों की तीव्रता का प्रभाव अनुप्रभाव काल प्रत्येक बार 2·5 मिनट
वक्र I = 1.0×10^{-4} M
II = 0.5×10^{-4} M

चित्र 5. कर्णातीत तरंगों द्वारा $1.0 \times 10^{-4} M$, $KMnO_4$ विलयन के अवकरण पर pH का प्रभाव, अनुप्रभाव काल प्रत्येक बार 5 मिनट।

जलीय विलयन में जब कर्णातीत तरंगें अनुप्रभावित की जाती हैं तब जल के अणु का निम्नांकित प्रकार से विखण्डन होता है।[6–8]

$$HOH \rightarrow H+OH \qquad H+H \rightarrow H_2$$

$$H_2+OH \rightarrow H_2O+H \qquad OH+OH \rightarrow H_2O_2$$

$$H+H_2O_2 \rightarrow H_2O+OH \qquad H+O_2(\text{हवा की}) \rightarrow HO_2$$

$$HO_2+H \rightarrow H_2O_2 \qquad HO_2+HO_2 \rightarrow H_2O_2+O_2$$

इनमें में केवल H, HO_2 एवं H_2O_2 ही निम्न pH पर अवकरण करने वाली प्रजातियाँ हैं। इन प्रजातियों द्वार Ce^{4+} का अवकरण होकर Ce^{3+} बनता है और Mn^{7+} के अवकरण से Mn^{2+} उत्पन्न होता है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा० सत्य प्रकाश का आभारी है जिन्होंने इस कार्य में सहायता पहुँचाई। लेखक काउन्सिल आफ साइन्टिफिक एवं इन्डस्ट्रियल रिसर्च का भी कृतज्ञ है जिसने आर्थिक सहायता प्रदान की।

निर्देश

1. रिवायरान्ड, पी० एवं हेयसिन्सकी, एम०। **जर्न० केमि० फिजि०**, 1962, **59**, 623.
2. विटकोवा, एस०। **रोशनिकी केम०**, 1962, **36**, 693.
3. हेयसिन्सकी, एम० एवं जुलियन, आर०। **जर्न० केमि० फिजि०**, 1960, **57**, 666.
4. वावरजाइसेक, डबल्यू०, । **जर्न० एनार्ग० एलगेमाइने केम०**, 1960, **304**, 116.
5. वावरजाइसेक, डबल्यू० एवं टिलजानोवस्का डी०। **नेचर**, 1962, **194**, 571.
6. वाइसलर, ए०। **जर्न० अमे० केमि० सोसा०**, 1959, **81**, 1077.
7. लिन्डस्ट्राम, ओ० तथा लाम, ओ०। **जर्न० फिज० कोलायड केमि०**, 1951, **55**, 1139.
8. प्रोधाम, आर० ओ० एवं ग्रोवर, पी०। **जर्न० केमि० फिजि०**, 1949, **46**, 323.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 11, No. 4, Oct. 1968, Pages 201-204

मइक्रोकास्मिक लवण के निश्चयन की एक विधि

अरुण कुमार सक्सेना, मनहरन नाथ श्रीवास्तव
तथा
बी० बी० एल० सक्सेना
रसायन विभाग, प्रयाग विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

[प्राप्त—सितम्बर 15, 1968]

सारांश

विभवमापी अध्ययनों से प्रगट है कि परक्लोरिक हाइड्रोक्लोरिक, एवं सल्फ्यूरिक अम्लों को माइक्रोकास्मिक लवण के विलयन के द्वारा अनुमापित करने पर पी-एच वक्रों में एक तुल्यांक पर 3·5-6·0 पी-एच के मध्य स्पष्ट भंग परिलक्षित है। इसके आधार पर ब्रोमोक्रेसाल पर्पल रंजक का सूचक के रूप में प्रयोग करते हुये इन अम्लों द्वारा माइक्रोकास्मिक लवण के निश्चयन की विधि वर्णित है।

Abstract

A method for the determination of microcosmic salt. *By* Arun Kumar Saxena, Man Haran Nath Srivastava and B. B. L. Saxena, Chemistry Department, University of Allahabad, Allahabad.

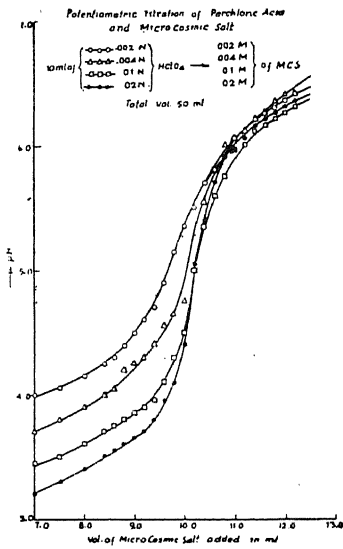
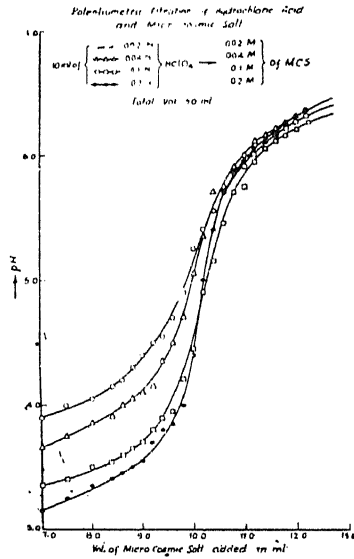
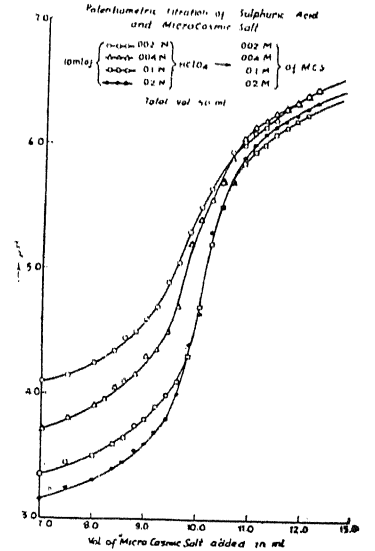
It is evident from the potentiometric studies that well marked inflexions are obtained in the pH titration curves of perchloric, hydrochloric and sulphuric acids by microcosmic salt solution at one equivalence between pH 3·5-6·0. On this basis, a method has been proposed for the determination of microcosmic salt by such acids using bromocresol purple as indicator.

संदर्भों के सर्वेक्षण से प्रगट है कि अभी तक माइक्रोकास्मिक लवण के निश्चयन के सम्बन्ध में कोई विशेष कार्य नहीं हुआ है। अभी कुछ अध्ययनों के समय लेखकों को माइक्रोकास्मिक लवण के मानक विलयनों की आवश्यकता पड़ी, अतः इसके निश्चयन का प्रश्न भी उठ खड़ा हुआ। प्रस्तुत प्रपत्र में परक्लोरिक, हाइड्रोक्लोरिक एवं सल्फ्यूरिक अम्लों का माइक्रोकास्मिक लवण विलयन के द्वारा विभवमापी अनुमापन किया गया है और फिर उसके आधार पर इन अम्लों की सहायता से माइक्रोकास्मिक लवण के निश्चयन की एक सरल विधि प्रस्तुत की गई है।

प्रयोगात्मक

परक्लोरिक अम्ल, हाइड्रोक्लोरिक एवं सल्फ्यूरिक अम्लों (विश्लेषणात्मक कोटि) के $0.1N$ विलयन तैयार किये गये और फिर प्रयोगों में प्रयुक्त सभी विलयन इन्हीं को तन्वित करके प्राप्त किये गये। माइक्रोकास्मिक लवण (Merck) ($NaNH_4HPO_4.4H_2O$) का एक $0.02M$ विलयन उसके अणुभार के अधार पर गणना करके बनाया गया, और फिर इच्छित सान्द्रताओं के विलयन इसको तन्वित करके प्राप्त किये गये। सूचक के रूप में ब्रोमोक्रेसाल पर्पल (B.D.H.) के एक 0.1% विलयन का उपयोग किया गया। विभवमापी अनुमापन लीड्स नार्थप के पी-एच मीटर द्वारा किये गये।

विभवमापी अध्ययन

विभवमापी अनुमापनों के परिणाम चित्र में प्रदर्शित हैं। इन प्रयोगों में उपयुक्त सान्द्रता के परक्लोरिक, हाइड्रोक्लोरिक अथवा सल्फ्यूरिक अम्ल का 10 मिली० लेकर उसे आसुत जल द्वारा 50 मिली०

चित्र 1. माइक्रोकास्मिक लवण का परक्लोरिक अम्ल द्वारा विभवमापी अनुमापन

चित्र 2. माइक्रोकास्मिक लवण का हाइड्रोक्लोरिक अम्ल द्वारा विभवमापी अनुमापन

चित्र 3. माइक्रोकास्मिक लवण का सल्फ्यूरिक अम्ल द्वारा विभव मापी अनुमापन

तक तन्वित कर दिया गया और फिर एक माइक्रोब्यूरेट द्वारा माइक्रोकास्मिक लवण के उसी सान्द्रता के विलयन से इनका पी-एच अनुमापन किया गया। वक्रों के अध्ययन से प्रगट है कि इन सभी वक्रों में 3·5-6·0 पी एच के मध्य एक तुल्यांक पर स्पष्ट भंग (inflexion) प्राप्त होता है और इस प्रकार माइक्रोकास्मिक लवण के विलयन का विभवमापी अनुमापन सफलतापूर्वक किया जा सकता है।

अनुमापन विधि

उपयुक्त सान्द्रता के परक्लोरिक, हाइड्रोक्लोरिक अथवा सल्फ्यूरिक अम्ल का 5 मिली० एक बीकर में लीजिये, और उसमें आसुत जल मिलाकर उसका आयतन लगभग 25 मिली० कर लीजिये। फिर उसमें 0.1% ब्रोमोक्रेसाल पर्पल सूचक विलयन की एक या दो बूँदें मिलाइये। विलयन का रंग पीला होगा। इसमें एक माइक्रोब्यूरेट के द्वारा धीरे-धीरे माइक्रोकास्मिक लवण का विलयन मिलाइये, जब तक कि मिश्रण का रंग समाप्त न हो जाये और उसमें हल्का बैंगनी रंग आ जाये। यही बिन्दु इसका अनुमापनांक होगा। अम्लों के मानक विलयनों की सान्द्रता के द्वारा माइक्रोकास्मिक लवण विलयन के सान्द्रता की गणना कर लीजिये।

प्रयोगफल सारणी 1, 2 तथा 3 में संग्रहीत हैं।

सारणी 1

परक्लोरिक अम्ल द्वारा अनुमापन

परक्लोरिक अम्ल की सान्द्रता	अनुमापनांक मिली०	माइक्रोकास्मिक लवण के विलयन की सान्द्रता (ग्राम प्रति लीटर)	
N		प्रयोगात्मक	गणनात्मक
0·02	5·00	4·1818	4·1818
	5·02	4·1660	
0·01	4·98	2·1000	2·0909
	5·00	2·0909	
0·004	5·04	0·9299	0·8364
	5·00	0·8364	
0·002	5·02	0·4166	0·4182
	5·04	0·4150	

सारणी 2

हाइड्रोक्लोरिक अम्ल द्वारा अनुमापन

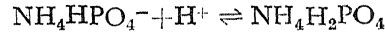
HCl की सान्द्रता	अनुमापनांक मिली०	माइक्रोकास्मिक लवण के विलयन की सान्द्रता (ग्राम प्रति लीटर)	
N		प्रयोगात्मक	गणनात्मक
0·01	5·04	2·0740	2·0909
	5·02	2·0830	
0·004	5·00	0·8364	0·8364
	5·04	0·8299	
0·002	5·00	0·4182	0·4182
	5·06	0·4132	

सारणी 3

सल्फ्यूरिक अम्ल के द्वारा अनुमापन

H_2SO_4 की सान्द्रता	अनुमापनांक मिली०	माइक्रोकास्मिक लवण के विलयन की सान्द्रता (ग्राम प्रति लीटर)	
N		प्रयोगात्मक	गणनात्मक
0·01	5·00	2·0909	2·0909
	5·04	2·0740	
0·004	5·00	0·8364	0·8364
	5·02	0·8332	
0·002	5·02	0·4176	0·4182
	5·00	0·4182	

उपर्युक्त प्रयोगफलों से प्रगट है कि इन अनुमापनों में माइक्रोकास्मिक लवण के एक अणु से एक हाइड्रोजन आयन की क्रिया होती है। अभिक्रिया को निम्न रूप से प्रदर्शित किया जा सकता है--

$$NH_4HPO_4^- + H^+ \rightleftharpoons NH_4H_2PO_4$$

कृतज्ञता-ज्ञापन

प्रथम लेखक विश्वविद्यालय अनुदान आयोग, भारत सरकार, नई दिल्ली के प्रति आर्थिक सहायता के हेतु आभारी है।

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 11, No. 4, Oct. 1968, Pages 205-209

लेथाइरस सटाइवस के बीजों के वसीय अम्लों का संघटन

कृष्ण बहादुर एवं सूरज प्रकाश बिल्ला
रसायन विभाग, प्रयाग विश्वविद्यालय, प्रयाग

[प्राप्त—अप्रैल 27, 1968]

सारांश

लेथाइरस सटाइवस के बीजों से प्राप्त तेल की साबुनीकरण क्रिया द्वारा दो प्रभाज प्राप्त हुए :-

1. असाबुनीकृत पदार्थ तथा 2. साबुनीकृत पदार्थ।

असाबुनीकृत पदार्थ को ऐल्युमिना स्तम्भ क्रोमेटोग्राफी द्वारा शुद्ध रूप से प्राप्त किया गया। इसके गुणों का परीक्षण करने पर यह ज्ञात हुआ कि यह एक स्टेराल है, जिसका गलनांक 133–136°C है। इसका ऐसीटेट बनाने पर यह बीटा-साइटोस्टेराल प्रतीत हुआ। साबुनीकृत पदार्थ के अध्ययन के लिये उसका यूरिया-एडक्ट बनाया गया और यह ज्ञात हुआ कि उसमें कैप्रिक अम्ल 7·0 प्रतिशत; पामिटिक अम्ल 14·2 प्रतिशत; स्टियरिक अम्ल 7·0 प्रतिशत, लिग्नोसेरिक अम्ल 3·5 प्रतिशत, ओलीक अम्ल 52·0 प्रतिशत एवं लीनोलीक अम्ल 16·3 प्रतिशत हैं।

Abstract

Composition of fatty acids in the seeds of Lathyrus sativus. *By* Dr. K. Bahadur and S. P. Billa, Department of Chemistry, University of Allahabad, Allahabad.

The oil of Lathyrus sativus seeds was extracted with petroleum ether (40 : 60). It was saponified and separated into two fractions:

(*a*) Unsaponifiable matter and (*b*) saponifiable matter.

The unsaponifiable matter is obtained in a pure form by eluting it over alumina in column chromatography. On examining its properties, it was found to be a sterol with m.p. 133-136°C. The acetate derivative was prepared and studied. The sterol was identified as β-sitosterol. The study of the saponifiable matter by making its urea-aduct shows that it contains capric acid 7·0%; palmitic acid 14·2%; stearic acid 7·0%; lignoceric acid 3·5%; oleic acid 52·0%; and linoleic acid 16·3%.

लेथाइरस सटाइवस (खेसारी अथवा चपरी) के बीजों को पीस कर पेट्रोलियम ईथर (40:60) से साक्सलेट द्वारा निष्कर्षित किया गया, जिससे बीजों का कुछ अंश ईथर में चला गया। ईथर को आसवित करने पर तेल प्राप्त हुआ। इस तेल की साबुनीकरण संख्या[1-2] 196, एवं आयोडीन संख्या[3] 73·70 निकली।

तेल की निश्चित मात्रा को लेकर उसे 0·5N ऐलकोहलीय पोटैशियम हाइड्राक्साइड के विलयन के साथ जल उष्मक पर तीन घंटे तक साबुनीकृत किया गया। तत्पश्चात् उसके ऐलकोहल को आसवित करके निकाल लिया गया एवं बचे हुये साबुन-केक को जल की अधिक मात्रा में विलयित किया गया। यह साबुनीकृत पदार्थ हुआ। जो हिस्सा जल में विलीन नहीं हुआ उसे छान कर अलग किया गया। यह असाबुनीकृत पदार्थ है। यह 13 प्रतिशत निकला।

असाबुनीकृत पदार्थ

अब असाबुनीकृत पदार्थ को पेट्रोलियम ईथर से धोकर ईथर में घोल लिया गया। तत्पश्चात् इसे ऐल्युमिना स्तम्भ क्रोमेटोग्राफी द्वारा ईथर एवं बेंज़ीन (9:1) के मिश्रण से शुद्ध रूप में प्राप्त किया गया। फिर इस मिश्रण का उद्बाष्पन किया गया जिससे एक सफेद ठोस बचा, जिसका गलनांक 133-136°C था।

यह सफेद ठोस यौगिक बेंजीन, ईथर, गर्म ऐलकोहल एवं क्लोरोफार्म में तो विलीन हो जाता है पर जल में विलीन नहीं होता।

इस यौगिक के क्लोरोफार्म के विलयन में सान्द्र सल्फ्यूरिक अम्ल मिलाने पर गहरे लाल रंग का विलयन प्राप्त हुआ। इस यौगिक के क्लोरोफार्म के विलयन में ऐसीटिक ऐनहाइड्राइड एवं सान्द्र सल्फ्यूरिक अम्ल मिलाने पर बैंगनी रंग का विलयन प्राप्त होता है जो नीले रंग में बदलने लगता है। उपर्युक्त परीक्षण से स्टेराल की उपस्थिति पुष्ट होती है।

इस यौगिक को सोडियम ऐसीटेट एवं ऐसीटिक ऐनहाड्राइड के साथ ऐसीटिलित किया गया। प्राप्त ऐसीटिलित यौगिक को मेथिल ऐलकोहल के साथ शुद्ध किया गया। शुष्क करने के पश्चात् उसका गलनांक निकाला गया जो 124–126°C था।

उपर्युक्त परीक्षणों से यह ज्ञात होता है कि यह यौगिक बीटा-साइटोस्टेराल है।

साबुनीकृत पदार्थ

साबुनीकृत पदार्थ के विलयन को ईथर से निष्कर्षित कर लेते हैं, जिससे कि बचा हुआ असाबुनीकृत पदार्थ निकल जाता है। तत्पश्चात् इस विलयन को 5 प्रतिशत सल्फ्यूरिक अम्ल के अधिक विलयन से क्रिया कराते हैं। इस क्रिया से प्राप्त वसीय अम्लों को पृथक्कारी कीप से निष्कर्षित कर लेते हैं। वसीय अम्लों के ईथरीय विलयन को आसुत जल से धोते हैं, जिससे खनिज अपद्रव्य पृथक हो जायें। फिर ईथर के उद्बाष्पन से वसीय अम्लों के मिश्रण को प्राप्त किया गया।

सारणी 1

ठोस वसीय अम्लों का संघटन

क्रम संख्या	भार	साबुनीकरण संख्या	साबुनीकरण तुल्यांक	आयोडीन संख्या	कैप्रिक अम्ल	पामिटिक अम्ल	स्टियरिक अम्ल	लिग्नोसेरिक अम्ल	ओलीक अम्ल	लीनोलीक अम्ल
1.	4.22	209	268.5	22.6	—	2.367	0.793	—	1.060	—
2.	0.66	220.2	248.6	58.6	0.146	—	0.084	—	0.430	—
3.	2.00	218.5	256.8	57.3	0.128	—	0.577	—	1.295	—
भार	6.88	—	—	—	0.274	2.367	1.454	—	2.785	—
प्रतिशत भार	—	—	—	—	4.00	34.40	21.13	—	40.47	—

सारणी 2

द्रव वसीय अम्लों का संघटन

क्रम संख्या	भार	साबुनीकरण संख्या	साबुनीकरण तुल्यांक	आयोडीन संख्या	कैप्रिक अम्ल	पामिटिक अम्ल	स्टियरिक अम्ल	लिग्नोसेरिक अम्ल	ओलीक अम्ल	लीनोलीक अम्ल
1.	3.71	195.0	287.7	63.5	—	0.516	—	0.694	2.50	—
2.	1.44	199.5	281.2	92.5	—	—	—	0.035	1.33	0.075
3.	0.62	201.7	278.2	95.25	—	0.074	—	—	0.436	0.110
4.	8.18	217.1	258.5	112.4	1.183	—	—	—	3.777	3.220
भार	13.95	—	—	—	1.183	0.590	—	0.729	8.043	3.405
प्रतिशत भार	—	—	—	—	8.48	4.22	—	5.22	57.66	24.42

वसीय अम्लों के मिश्रण की साबुनीकरण संख्या 208 एवं आयोडीन संख्या 75·6 ज्ञात हुई। वसीय अम्लों के मिश्रण को लेड लवण बनाने की ट्विटचेल[4] की विधि द्वारा ठोस एवं द्रव वसीय अम्लों में पृथक कर लिया गया।

ठोस एवं द्रव वसीय अम्लों की अलग-अलग साबुनीकरण संख्याएं, आयोडीन संख्याएं एवं उनके साबुनीकरण तुल्यांक[5] भी ज्ञात किये गये। ठोस तथा द्रव वसीय अम्लों का गुणात्मक एवं भारात्मक अध्ययन यूरिया एडक्ट [5–9] बना कर किया गया। इस विधि से प्राप्त प्रत्येक प्रभाज की साबुनीकरण संख्या एवं आयोडीन संख्या ज्ञात की गई। उपर्युक्त प्राप्त संख्याओं से प्रत्येक अम्ल का संघटन ज्ञात किया गया। प्राप्त परिणाम सारणी 1–3 में दिये गये है।

सारणी 3

वसीय अम्लों के मिश्रण का प्रतिशत संघटन

अम्ल का नाम	कैप्रिक अम्ल	पामिटिक अम्ल	स्टियरिक अम्ल	लिग्नोसेरिक अम्ल	ओलीक अम्ल	लीनोलीक अम्ल
प्रतिशत मात्रा	7·0	14·2	7·0	3·5	52·0	16·3

निर्देश

1. कीस्ट्रफर। जटश० फ० अनल० कैम०, 1879, **18**, 199.
2. जेमाइसन, जी० एस०। "Vegetative Fats and Oils," **अमेरिकन कैमिकल सोसाइटी, मोनोग्राफ सीरीज इन्ड०, एडीशन**, 1943, 389.
3. वही। **ऐसोसिऐशन आफिशियल ऐग्रीकलचर केमिस्ट्स**, "Methods for Analysis", 1925, 287.
4. ट्विटचेल, ई०। **जर्न० इन्ड० केमि०**, 1921, , **13**, 806.
5. होल्डे, डी० एवं म्यूल्लर, इ०। The Examination of Hydrocarbon Oils and Saponifiable Fats and Waxes, **प्रथम संस्करण**, 1915, **पृ०** 343.

6. सेक्युराई, एच० । **जर्न० केमि० सोसा० (जापान)**, 1953, 56, 118-20.

7. वही । **कैमिकल ऐबस्ट्रैक्टस**, 1953, **48**, 3710 **सी०**.

8. लिमये, जी० एम० । **बाम्बे टेक्नोलिस्ट**, 1954, **4**, 69-74.

9. आचार्य, के० टी०, सालिगा, बी० पी०, सेलीटोर एस० ए० एवं जहीर, एस० एच० । **जर्न० साइं० इण्ड० रिसर्च (इण्डिया)**, 1955, **14बी**, 348-54.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 11, No. 4, Oct. 1968, Pages 211-218

दो चलों के लैप्लास रूपान्तर का एक नवीन सार्वीकरण

माता प्रसाद जायसवाल
काशी हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी

(डा० बृज मोहन द्वारा प्रेषित)

[प्राप्त—दिसम्बर 18, 1967]

सारांश

इस अभिपत्र में दो चलों के लैप्लास रूपान्तर का एक नवीन सार्वीकरण घातीय फलन और मायजर के फलन के गुणनफलों को लेकर किया गया है। रूपान्तर की परिभाषा देने के पश्चात्, उसी के लिये एक उत्क्रमण-सूत्र दिया गया है। अभिपत्र की समाप्ति उत्क्रमण-सूत्र के लिए एक उदाहरण देकर की गयी है।

Abstract

A new generalisation of the Laplace transform of two variables. *By* Mata Prasad Jaiswal, Department of Mathematics, Banaras Hindu University.

In this paper an attempt has been made to arrive at a new generalisation of the classical Laplace transform of two variables by taking the products of exponential function and Meijer's G-function as the kernel of transformation. After having defined the transform, an inversion formula for the same has been given. The paper has been concluded by giving an example supporting the inversion formulae.

1. लैप्लास रूपान्तर

$$\phi(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt \tag{1·1}$$

का एक सार्वीकरण लेखकों[3] ने इस रूप में दिया है

$$\phi(s)=\int_0^\infty e^{-\alpha sx}G_{p,q}^{m,n}\left(\beta(sx)^\lambda \,\middle|\, \begin{matrix}(a_p)\\(b_q)\end{matrix}\right)f(x)\,dx, \tag{1.2}$$

जिसमें
$$0 \leqslant m \leqslant q,\ 0 \leqslant n \leqslant p,\ p+q<2(m+n),$$
$$|arg\,\beta s|<(m+n-\tfrac{1}{2}p-\tfrac{1}{2}q)\pi,\ (a_r)\equiv a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_r$$
और λ धन पूर्णांक है।

समीकरण (1·2) में $m=q=1=\lambda, p=n=0=b_1, \alpha+\beta=1$ रखने पर और एकात्म्य $G^{1,0}_{0,1}(x/0)=e^{-x}$ का प्रयोग करने पर (1·1) प्राप्त हाता है।

इसी प्रकार हम दो चलों के फलन $f(x, y)$ के द्विक लैप्लास रूपान्तर का एक सार्वीकरण निम्न-लिखित रूप में देते हैं :

$$\phi(s, t)=\iint_0^\infty e^{-(\alpha sx+\beta ty)}\, G^{m,n}_{p,q}\left(\xi(sx)^\mu \,\middle|\, \begin{matrix}(a_p)\\(b_q)\end{matrix}\right)$$
$$\times G^{k,l}_{\tau,\sigma}\left(\eta(ty)^\nu \,\middle|\, \begin{matrix}(c_\tau)\\(d_\sigma)\end{matrix}\right) f(x,y)\, dx\, dy, \tag{1.3}$$

जिसमें
$$0 \leqslant m \leqslant q,\ 0 \leqslant n \leqslant p,\ 0 \leqslant k \leqslant \sigma,\ 0 \leqslant l \leqslant \tau,$$
$$\tau+\sigma<2(k+l),\ p+q<2(m+n),\ |arg\,\xi s|<(m+n-\tfrac{1}{2}p-\tfrac{1}{2}q)\pi$$
$$|arg\,\eta t|<(k+l-\tfrac{1}{2}\tau-\tfrac{1}{2}\sigma)\pi,\ (e_\tau)\equiv e_1, e_2, \ldots, e_\tau,\ \mu$$
तथा ν धन पूर्णांक हैं।

हम (2·3) को संकेत
$$\phi(s,t)\,\frac{\alpha,\ \beta}{\xi,\ \eta}\,f(x,y)$$
से निरूपित करते हैं।

(1·3) में पारिभाषित रूपान्तर के प्राचलों को विशिष्ट मान देने पर दो चलों के लैप्लास रूपान्तर के पूर्व ज्ञात सार्वीकरण विशिष्ट रूपों में प्राप्त होते हैं। हम ऐसे कुछ विशिष्ट रूपों की सूची नीचे देते हैं।

2. (1.3) **की विशिष्ट दशायें :**

(**क**) जब (1·3) में
$$m=q=1=k=\sigma=\mu=\nu,\ n=p=0=l=\tau,\ b_1=0=d_1,\ \alpha+\xi=1 \text{ और } \beta+\eta=1$$
रखते हैं, तो दो चलों के लैप्लास रूपान्तर के लघ्वीरूप

$$\phi(s, t)=\iint_0^\infty e^{-(sx+ty)} f(x,y)\, dx\, dy$$

को प्राप्त करते हैं।

(ख) पुनः (1·3) में

$$\alpha=\xi=1=\mu=p=n,\ m=q=2,\ a_1=1,\ b_1=-k_1-m_1,\ b_2=-k_1+m_1,$$

$$\beta=\eta=\nu=1=l=\tau,\ k=\sigma=2,\ c_1=1,\ d_1=-k_2-m_2,\ d_2=-k_2+m_2$$

लेने पर हमें मेहरा[5] द्वारा दिये हुए दो चलों के मायजर रूपान्तर की प्राप्ति होती है।

(ग) जब (1·3) में

$$\alpha=\xi=1=\beta=\eta,\ m=q=2=\sigma,\ p=n=1=l=\tau,\ \mu=\nu=1,$$

$$a_1=\tfrac{1}{2}+m_1+k_1,\ b_1=0,\ b_2=2m_1,\ c_1=\tfrac{1}{2}+m_2+k_2,\ d_1=0 \text{ और } d_2=2m_1$$

स्थानापत्तियाँ की जाती हैं, तो मुखर्जी[4] द्वारा दिये हुए दो चलों के वर्मा रूपान्तर की प्राप्ति होती है।

(घ) (1·3) में

$$\alpha=\alpha',\ \xi=\mu=1=\eta=\nu,\ m=q=2=k=\sigma,\quad n=0=l,\ p=1=\tau,$$

$$a_1=k_1+m_1,\ b_1=k_1,\ b_2=k_1+m_1-1,\ c_1=k_2+m_2,\ d_1=k_2 \text{ और } d_2=k_2+m_2-1$$

रखने पर एवं रूपान्तर

$$G_{1,2}^{2,0}\left(x \,\middle|\, \begin{matrix}\nu\\ 0,\ \nu-1\end{matrix}\right)=E_\nu(x)$$

का प्रयोग करने पर, जिसमें $E_\nu(x)$ एक पूर्णांक घात फलन है, पाण्डेय[6] द्वारा दिये हुये दो चलों के पूर्णांक घातीय रूपान्तर की प्राप्ति होती है।

3. उत्क्रमण सूत्र:

अब हम रीड[7] द्वारा मेलिन के दोहरे उत्क्रमण सूत्र के लिए दिये हुए फल का प्रयोग करके (1.3) में पारिभाषित दो चलों के सार्वीकृत लैप्लास रूपान्तर के लिए एक उत्क्रमण सूत्र प्राप्त करते हैं।

(1.3) के दोनों ओर $s^{-\rho_1}t^{-\rho_2}$ से गुणा करके s और t के सापेक्ष 0 से ∞ तक समाकलन करने पर हमें

$$I=\iint_0^\infty s^{-\rho_1}t^{-\rho_2}\phi(s,t)\,ds\,dt$$

$$=\iint_0^\infty s^{-\rho_1}t^{-\rho_2}ds\,dt\iint_0^\infty e^{-(\alpha sx+\beta ty)}G^{m,n}_{p,q}\left(\xi(sx)^\mu\left|\begin{matrix}(a_p)\\(b_q)\end{matrix}\right.\right)$$

$$\times G^{k,l}_{\tau,\sigma}\left(\eta(ty)^\nu\left|\begin{matrix}(c_\tau)\\(d_\sigma)\end{matrix}\right.\right)f(x,y)\,dx\,dy$$

प्राप्त होता है ।

समाकलन के क्रम में उत्क्रमण करने पर

$$I=\iint_0^\infty f(x,y)\,dx\,dy\iint_0^\infty s^{-\rho_1}t^{-\rho_2}e^{-(\alpha sx+\beta ty)}G^{m,n}_{p,q}\left(\xi(sx)^\mu\left|\begin{matrix}(a_p)\\(b_q)\end{matrix}\right.\right)$$

$$\times G^{k,l}_{\tau,\sigma}\left(\eta(ty)^\nu\left|\begin{matrix}(c_\tau)\\(d_\sigma)\end{matrix}\right.\right)ds\,dt.$$

हम आंतरिक द्विक समाकल का मान, एकाकी समाकल पर दिये हुये संवादी परिणाम [2, p. 419(5)] की सहायता से निम्नरूप में प्राप्त करते हैं :—

$$I=(2\pi)^{1-1/2\mu-1/2\nu}\mu^{1/2-\rho_1}\nu^{1/2-\rho_2}\alpha^{\rho_1-1}\beta^{\rho_2-1}\,G^{m,n+\mu}_{p+\mu,q}\left(\frac{\xi\mu^\mu}{\alpha^\mu}\left|\begin{matrix}(e_\mu),(a_p)\\(b_q)\end{matrix}\right.\right)$$

$$\times G^{k,l+\nu}_{\tau+\nu,\sigma}\left(\frac{\eta\nu^\nu}{\beta^\nu}\left|\begin{matrix}(f_\nu),(c_\tau)\\(d_\sigma)\end{matrix}\right.\right)\iint_0^\infty x^{\rho_1-1}y^{\rho_2-1}f(x,y)\,dx\,dy,$$

जिसमें $p+q<2(m+n),\ |arg\,\alpha|<\tfrac{1}{2}\pi,\ |arg\,\xi|<(m+n-\tfrac{1}{2}p-\tfrac{1}{2}q)\pi,$

$\tau+\sigma<2(k+l),\ |arg\,\beta|<\tfrac{1}{2}\pi,\ |arg\,\eta|<(k+l-\tfrac{1}{2}\tau-\tfrac{1}{2}\sigma)\pi,$

$R(b_j-\rho_1)>-1;\ j=1,\ldots,m;\ R(d_i-\rho_2)>-1,\ i=1,\ldots,k;$

$e_{r+1}=\dfrac{\mu+\rho_1-1-r}{\mu},\ (r=0,1,\ldots,\mu-1)$ और $f_{r+1}=\dfrac{\nu-1+\rho_2-r}{\nu},\ (r=0,1,\ldots,\nu-1).$

अब रीड[7] के द्विक मेलिन उत्क्रमण सूत्र की सहायता से हम

$$f(x,y)=\frac{(2\pi)^{1/2\mu+1/2\nu-1}}{(2\pi i)^2}$$

$$\int_{\delta_1-i\infty}^{\delta_1+i\infty}\int_{\delta_2-i\infty}^{\delta_2+i\infty}\frac{\alpha^{1-\rho_1}\beta^{1-\rho_2}x^{-\rho_1}y^{-\rho_2}\mu^{\rho_1-1/2}\nu^{\rho_2-1/2}F(\rho_1,\rho_2)}{G^{m,n+\mu}_{p+\mu,q}\left(\frac{\xi\mu^\mu}{\alpha^\mu}\left|\begin{matrix}(e_\mu),(a_p)\\(b_q)\end{matrix}\right.\right)G^{k,l+\nu}_{\tau+\nu,\sigma}\left(\frac{\eta\nu^\nu}{\beta^\nu}\left|\begin{matrix}(f_\nu),(c_\tau)\\(d_\sigma)\end{matrix}\right.\right)}\,d\rho_1 d\rho_2$$

प्राप्त करते हैं, जिसमें

$$F(\rho_1, \rho_2)=\iint_0^\infty s^{-\rho_1}t^{-\rho_2}\phi(s, t)\, ds\, dt \tag{3.2}$$

श्रौर

(i) $f(x, y)$ खंडशः सतत है,

(ii) द्विक समाकल $\iint_0^\infty x^{-\rho_1}y^{-\rho_2}\phi(x, y)\, dx\, dy$ परम श्रभिसारी है श्रौर

(iii) द्विक समाकल $\iint_0^\infty x^{\delta_1-1}y^{\delta_2-1}f(x, y)\, dx\, dy$ भी परम श्रभिसारी है, जिसमें

$$\left.\begin{matrix}\rho_1=\delta_1+iT_1\\ \rho_2=\delta_2+iT_2\end{matrix}\right\}-\infty<(T_1, T_2)<\infty.$$

समाकलन के क्रम का उत्क्रमण निम्नलिखित विधि से न्यायसंगत सिद्ध किया जा सकता है।

यदि $|f(x, y)|$ के सार्वीकृत लैप्लास रूपान्तर का श्रस्तित्व है, तो समाकल परम श्रभिसारी है तथा यदि

$$f(x, y)=0(e^{-\mu_1x-\mu_2y}),\ x \text{ श्रौर } y \text{ के वृहत मानों के लिए,}$$

$$p+q<2(m+n),\ \tau+\sigma<2(k+l),\ |arg\,\alpha|<\tfrac{1}{2}\pi,\ |arg\,\beta|<\tfrac{1}{2}\pi,$$

$$|arg\,\xi|<(m+n-\tfrac{1}{2}p-\tfrac{1}{2}q)\pi,\ |arg\,\eta|<(k+l-\tfrac{1}{2}\tau-\tfrac{1}{2}\sigma)\pi,\ R(b_j-\rho_1)>-1,$$

$$j=1, \ldots, m;\ R(d_j-\rho_2)>-1,\ (j=1, \ldots, k) \text{ श्रौर } R(\mu_1, \mu_2)>0$$

तो $s-t$ समाकल परम श्रभिसारी है। श्रतः यदि $x^{\rho_1-1}y^{\rho_2-1}f(x, y)$ का $L(0, \infty)$ से सम्बन्ध है तो परिणामी समाकल परम श्रभिसारी है श्रौर उत्क्रमण का श्रौचित्य सिद्ध हो जाता है।

उपफल : (2.1) में $m=q=1=k=\sigma=\mu=\nu$, $p=n=0=l=\tau$, $\alpha+\xi=1$, $\beta+\eta=1$ श्रौर $b_1=0=d_1$ रखने पर दो चलों के लैप्लास रूपान्तर के लिए संवादी फल प्राप्त होता है।

4 उदाहरण :

मान लिया

$$f(x, y)=e^{-\lambda_1x-\lambda_2y}[R(\lambda_1)>0, R(\lambda_2)>0]$$

तब

$$\phi(s, t)=\iint_0^\infty e^{-(\lambda_1+\alpha s)x}e^{-(\beta t+\lambda_2)y}G^{m,\,n}_{p,\,q}\left(\xi(sx)^\mu \,\middle|\, \begin{matrix}(a_p)\\(b_q)\end{matrix}\right) G^{k,\,l}_{\tau,\,\sigma}\left(\eta(ty)^\nu \,\middle|\, \begin{matrix}(c_\tau)\\(d_\sigma)\end{matrix}\right) dx\, dy.$$

हम एकाकी समाकल पर दिये हुए संवादी फल [2, p 419 (5)] की सहायता से समाकलों का मान

$$\phi(s,t)=(2\pi)^{1-1/2\mu-1/2\nu}\mu^{1/2}\nu^{1/2}(\alpha s+\lambda_1)^{-1}(\beta t+\lambda_2)^{-1}\,G^{m,\,n+\mu}_{p+\mu,\,q}\left(\frac{\xi(s\mu)^\mu}{(\alpha s+\lambda_1)^\mu}\,\middle|\,\begin{matrix}(e'_\mu),(a_p)\\(b_q)\end{matrix}\right)$$

$$\times G^{k,\,l+\nu}_{\tau+\nu,\,\sigma}\left(\frac{\eta(t\nu)^\nu}{(\beta s+\lambda_2)^\nu}\,\middle|\,\begin{matrix}(f'_\nu),(c_\tau)\\(d_\sigma)\end{matrix}\right)$$

प्राप्त करते हैं जिसमें

$$p+q<2(m+n)+\mu,\ \tau+\sigma<2(k+l)+\nu,$$

$$|arg\,(\alpha s+\lambda_1)|<\tfrac{1}{2}\pi,\ |arg\,(\beta t+\lambda_2)|<\tfrac{1}{2}\pi,\ R(b_j)>-1,\ R(d_i)>-1;$$

$$j=1,2,\ldots,m;\ i=1,2,\ldots,k;\ |arg\,\xi x|<(m+n-\tfrac{1}{2}p-\tfrac{1}{2}q+\tfrac{1}{2}\mu)\pi,$$

$$|arg\,\eta t|<(k+l+\tfrac{1}{2}\nu-\tfrac{1}{2}\xi-\tfrac{1}{2}\sigma)\pi,\ e'_{r+1}=\frac{\mu-1-r}{\mu},\ (r=0,1,\ldots,\mu-1)$$

और
$$f'_{r+1}=\frac{\nu-1-r}{\nu},\ (r=0,1,\ldots,\nu-1).$$

उपरलिखित समीकरण में G-फलन के लिए ज्ञात रूपान्तर [1, p. 209 (7)] का प्रयोग करने से प्राप्त $\phi(s,t)$ के मान को (2·2) में रखने पर

$$\psi(\rho_1,\rho_2)=\iint_0^\infty \phi(s,t)\,ds\,dt$$

$$=\frac{(\mu\nu)^{1/2}}{(2\pi)^{1/2\mu+1/2\nu-1}}\iint_0^\infty s^{-\rho_1}t^{-\rho_2}(\alpha s+\lambda_1)^{-1}(\beta t+\lambda_2)^{-1}$$

$$G^{n+\mu,\,m}_{q,\,p+\mu}\left(\frac{(\lambda_1+\alpha s)^\mu}{\xi(s\mu)^\mu}\,\middle|\,\begin{matrix}1-(b_q)\\1-(e'_\mu),\,1-(a_p)\end{matrix}\right)$$

$$G^{l+\nu,\,k}_{\sigma,\,\tau+\nu}\left(\frac{(\beta t+\lambda_2)^\nu}{\eta(ty)^\nu}\,\middle|\,\begin{matrix}1-(d_\sigma)\\1-(f'_\nu),\,1-(c_\tau)\end{matrix}\right)ds\,dt$$

$$I=\frac{(2\pi)^{1-1/2\,\mu-1/2\nu}(\mu\nu)^{1/2}}{\lambda_1^{\rho_1}\lambda_2^{\rho_2}\,\alpha^{1-\rho_1}\,\beta^{1-\rho_2}}\iint_1^\infty (uv)^{-1}\,(u-1)^{\rho_1-1}\,(v-1)^{\rho_2-1}$$

$$\times G^{n+\mu,\,m}_{q,\,p+\mu}\left(\frac{\alpha^\mu\ v^\mu}{\xi\mu^\mu}\,\middle|\,\begin{matrix}1-(b_q)\\1-(e_\mu'),\,1-(a_p)\end{matrix}\right)\ G^{l+\nu,\,k}_{\sigma,\,\tau+\nu}\left(\frac{\beta^\nu\ v^\nu}{\eta\nu^\nu}\,\middle|\,\begin{matrix}1-(d_\sigma)\\1-(f_\nu'),\,1-(a_p)\end{matrix}\right)du\,dv$$

प्राप्त होता है।

एकाकी समाकल पर दिए हुए संवादी फल [2, p. 417 (2)] की सहायता से उपर्युक्त समाकलों का मान निकालकर, सरल करने के पश्चात् तथा G-फलन के लिए ज्ञात रूपान्तरों [1, p. 209 (7,9)] का प्रयोग करने पर हमें

$$\psi(\rho_1, \rho_2)=\Gamma(\rho_1)\Gamma(\rho_2)\lambda_1^{-\rho_1}\lambda_2^{-\rho_2}\, \alpha^{\rho_1-1}\beta^{\rho_2-1}(2\pi)^{1-1/2\mu-1/2\nu}\, \mu^{1/2-\rho_1}\, \nu^{1/2-\rho_2}$$

$$\times G^{m,\, n+\mu}_{p+\mu,\, q}\left(\frac{\xi\mu^{\mu}}{\alpha^{\mu}}\middle|\begin{matrix}(e_\mu),\, (a^p)\\ (b_q)\end{matrix}\right) G^{k,\, l+\nu}_{\tau+\nu,\, \sigma}\left(\frac{\eta\nu^{\nu}}{\beta^{\nu}}\middle|\begin{matrix}(f_\nu),\, (c_\tau)\\ (d_\sigma)\end{matrix}\right) \tag{4·1}$$

प्राप्त होता है, जिसमें

$$p+q<2(m+n),\ \tau+\sigma<2(k+l)+\nu,\ R(\rho_1)>0,\ R(\rho_2)>0,$$

$$|arg\ \alpha^{\mu}|<(m+n-\tfrac{1}{2}p-\tfrac{1}{2}q+\tfrac{1}{2}\mu)\pi,\ \ |arg\ \beta^{\nu}|<(k+l-\tfrac{1}{2}\tau-\tfrac{1}{2}\sigma+\tfrac{1}{2}\nu)\pi,$$

$$R(1-p_1-a_j)>-1,\ j=1,\ \ldots,\ n;\ R(1-\rho_2-c_j)>-1\ (j=1, 2,\ \ldots,\ \tau);$$

$$R(1-\rho_1-e_j)>-1,\ i=1,\ \ldots,\ \mu;\ R(1-\rho_2-f_i)>-1,\ i=1,\ \ldots,\ \nu;$$

$$e_{r+1}=\frac{\mu+\rho_1-1-r}{\mu}\ (r=0,\ 1,\ \ldots,\ \mu-1)$$

और $$\frac{\nu+\rho_2-1-r}{\nu}\ (r=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \nu-1).$$

अतएव

$$\frac{(2\pi)^{1/2\mu+1/2\nu-1}}{(2\pi i)^2}\int_{\delta_1-i\infty}^{\delta_1+i\infty}\int_{\delta_2-i\infty}^{\delta_2+i\infty}\frac{\alpha^{1-\rho_1}\beta^{1-\rho_2}x^{-\rho_1}\,y^{-\rho_2}\mu^{\rho_1-1/2}\nu^{\rho_2-1/2}\psi(\rho_1\rho_2)}{G^{m,\, n+\mu}_{p+\mu,\, q}\left(\frac{\xi\mu^{\mu}}{\alpha^{\mu}}\middle|\begin{matrix}(e_\mu),\, (a_p)\\ (b^q)\end{matrix}\right) G^{k,\, l+\nu}_{\tau+\nu,\sigma}\left(\frac{\eta\nu^{\nu}}{\beta^{\nu}}\middle|\begin{matrix}(f_\nu),(c_\tau)\\ (d_\sigma)\end{matrix}\right)}\, d\rho_1 d\rho_2$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\delta_1-i\infty}^{\delta_1+i\infty}\int_{\delta_2-i\infty}^{\delta_2+i\infty} x^{-\rho_1}\,y^{-\rho_2}\,\Gamma(\rho_1)\Gamma(\rho_2)\lambda_1^{-\rho_1}\lambda_2^{-\rho_2}\ d\rho_1\, d\rho_2$$

$=e^{-\lambda_1 x-\lambda_2 y}$ $\psi(\rho_1, \rho_2)$ का मान समीकरण (4.1) से रखने पर

$=f(x, y)$.

इस प्रकार उत्क्रमण सूत्र का सत्यापन सिद्ध हुआ।

कृतज्ञता-ज्ञापन

प्रस्तुत अभिपत्र की तैयारी में डा० एस० मसूद द्वारा प्राप्त उदार सहायता के लिये लेखक उनका आभारी है।

निर्देश

1. एर्डेल्यी, ए० । Higher Transcendental Functions, Bateman manuscript Project, California Institute of Technology, 1953, 1 .
2. वही । Tables of Integral transforms. Batemen Manuscript Project, California Institute of Technology, 1954, 2.
3. मसूद, एस० तथा जायसवाल, एम० पी० । On a generalization of the Laplace Transform (प्रेस में)
4. मुखर्जी, एस० एन० । पी-एच० डी० थीसिस, काशी विश्वविद्यालय, 1964.
5. मेहरा, ए० एन० । बुले० कलकत्ता मैथ० सोसा०, 1956, **48**, 83-95.
6. पाण्डेय, आर० एन० । जर्न० बनारस हिन्दू युनिवर्सिटी, 1962-63, **13**, 332-343.
7. रीड, आई० एस० । ड्यूक मैथ० जर्न०, 1944, **11**, 565-574.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 11, No 4. Oct. 1968, Pages 219-224

लिपिया नोडीफ्लोरा का रासायनिक परीक्षण

भुवनचन्द्र जोशी

रसायन विभाग, राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर

[प्राप्त—जनवरी 16, 1968]

सारांश

अत्यधिक निकट सम्बन्धी ग्लुकोसाइडी रंजक पदार्थों के नोडीफ्लोरीडीन A तथा नोडीफ्लोरीडीन B इन दो अ-ग्लाइकोनों का विस्तार से अध्ययन किया गया है।

Abstract

Chemical Examination of Lippia Nodiflora. *By* B. C. Joshi, Department of Chemistry, University of Rajsthan, Jaipur.

Aglycone nodifloridine A and nodifloridine B from the closely related glucosidic colouring matters were studied in detail.

लिपिया नोडीफ्लोरा नामक पौदे से दो अत्यधिक निकट सम्बन्धी ग्लुकोसाइडी रंजक पदार्थ—नोडीफ्लोरिन A तथा नोडीफ्लोरिन B—विलग किये गये। ग्लुकोसाइडों के जलअपघटन से दो अ-ग्लाइकोन प्राप्त हुए—नोडीफ्लोरीडीन A ($C_{22}H_{24}O_7$, गलनांक 128°) तथा नोडीफ्लोरीडीन B ($C_{21}H_{24}O_9$, गलनांक 168°)।

अग्लाइकोन A

नोडीफ्लोरीडीन A में एक हाइड्राक्सि तथा एक मेथिल समूह पाए गये। अ-ग्लाइकोन A को 50% नाइट्रिक अम्ल से आक्सीकृत करने पर आक्सैलिक अम्ल के साथ ही एक अन्य अम्ल ($C_9H_8O_6$, गलनाँक 248°) प्राप्त हुआ जिसमें दो कार्बोक्सिल, एक हाइड्राक्सिल तथा एक मेथाक्सिल समूह विद्यमान थे। अ-ग्लाइकोन A का उत्प्रेरकीय हाइड्रोजनीकरण भी किया गया जिसमें हाइड्रोजन के 4 अणु अवशोषित हुये। इस हाइड्रोजनीकृत अ-ग्लाइकोन A के आक्सीकरण से दो अम्ल प्राप्त हुये—

1. ग्लुटैरिक अम्ल ($C_5H_8O_4$, गलनांक 95–96°) तथा
2. पिमेटिक अम्ल ($C_7H_{12}O_4$, गलनांक 102–104°)

अ-ग्लाइकोन A के अवरक्त स्पेक्ट्रम के जटिल पैटर्न में से निम्नांकित प्रमुख अवशोषण पट्टों को चुन लिया गया। V=3450 सेमी०$^{-1}$ (हाइड्राक्सिल समूह), 1725 सेमी०$^{-1}$ (S) (प्रथम संयुग्मन में दो बन्ध युक्त एक कार्बोक्सिल समूह), 1708 सेमी०$^{-1}$ (S) (प्रथम तथा द्वितीय संयुग्मन में द्विगुणबन्ध युक्त कार्बोक्सिल समूह), 1647 सेमी०$^{-1}$ (S), 1605 सेमी०$^{-1}$, (कीटोनिक समूह के प्रथम तथा द्वितीय संयुग्मन में द्विगुणबन्ध युक्त कार्बोक्सिल समूह), 1630 सेमी०$^{-1}$ (m), 1600 सेमी०$^{-1}$ (S) तथा 990 सेमी०$^{-1}$ (S) (ये अवशोषण पट्ट संयुग्मन में द्विगुणबन्ध की उपस्थिति के सर्वथा अनुकूल हैं)। इन अवशोषण पट्टों के अतिरिक्त स्पेक्ट्रम में ऐरोमैटीय यौगिकों के पैटर्न 1400–1550 सेमी०$^{-1}$ परास में तथा फिंगर प्रिंट (finger print) क्षेत्र में पाये गये।

अ-ग्लाइकोन B

नोडीफ्लोरीडीन B में दो कार्बोक्सिल, एक मेथाक्सिल तथा तीन हाइड्राक्सिल समूह पाये गये। 50% नाइट्रिक अम्ल द्वारा आक्सीकरण से अ-ग्लाइकोन B से ग्लुटैरिक अम्ल तथा $C_9H_8O_8$ सूत्र वाला अम्ल (गलनांक 253°) प्राप्त हुये। द्वितीय अम्ल में दो कार्बोक्सिल, एक मेथाक्सिल तथा 3 हाइड्राक्सिल समूह प्राप्त हुये। अ-ग्लाइकोन B के उत्प्रेरकीय हाइड्रोजनीकरण से हाइड्रोजन के 3 अणु अवशोषित हुये। इस उत्पाद के पुनः आक्सीकरण से निम्नांकित अम्ल प्राप्त हुये :-

1. ग्लुटैरिक अम्ल ($C_5H_8O_4$, गलनांक 95–96°)
2. पिमेटिक अम्ल ($C_{17}H_{12}O_4$, गलनांक 102–104°) तथा
3. $C_9H_8O_8$ (गलनांक 253°)

इसके अवरक्त अध्ययन से नोडीफ्लोरीडीन A की भाँति का पैटर्न प्राप्त हुआ। निम्नांकित लाक्षणिक विशिष्टतायें देखी गईं :-

γ=3425 सेमी०$^{-1}$ (हाइड्राक्सिल समूह), 1755 सेमी०$^{-1}$ (S) (बिना संयुग्मन के कार्बोक्सिल समूह), 1708 सेमी०$^{-1}$ (S) (प्रथम तथा द्वितीय संयुग्मन में द्विगुण बन्धों युक्त कार्बोक्सिल समूह), 1647 सेमी०$^{-1}$ (S) तथा 1605 सेमी०$^{-1}$ (m) (प्रथम तथा द्वितीय संयुग्मन में द्विगुण बन्धों युक्त एक कार्बोक्सिल समूह तथा कीटोनिक समूह के संयुग्मन में एक फेनिल समूह), 1630 सेमी०$^{-1}$, 1600 सेमी०$^{-1}$ तथा 900 सेमी०$^{-1}$ (ये अवशोषण पट्ट संयुग्मन में द्विगुण बन्धों की उपस्थिति को सूचित करते हैं)।

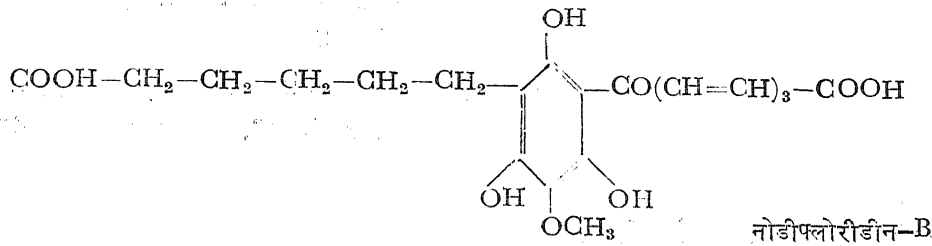
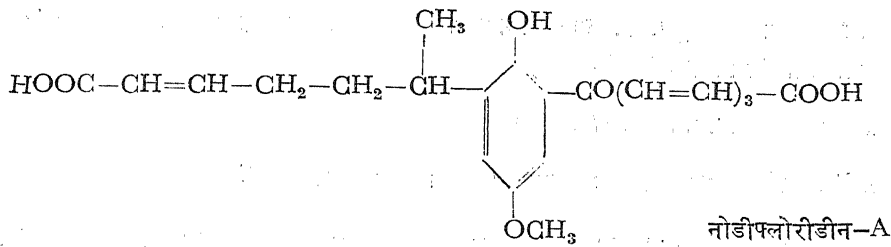
इन अवशोषण पट्टों के साथ ही 1400–1500 सेमी०$^{-1}$ पर एक अभिलाक्षणिक पैटर्न द्वारा ऐरोमैटीय नाभिक की उपस्थिति सूचित होती है।

इन तथ्यों से नोडीफ्लोरीडीन A तथा B की संरचनायें निम्नांकित प्रकार लिखी जा सकती हैं :-

$$HOOC-CH=CH-CH_2-CH_2-CH(CH_3)-C_6H_2(OH)(OCH_3)-CO(CH=CH)_3-COOH$$

नोडीफ्लोरीडीन–A

$$COOH-CH_2-CH_2-CH_2-CH_2-CH_2-C_6(OH)(OH)(OCH_3)(OH)-CO(CH=CH)_3-COOH$$

नोडीफ्लोरीडीन–B

प्रयोगात्मक

कतिपय प्रायोगिक विवरण पहले ही सूचित किये जा चुके हैं [1, 2]।

नोडीफ्लोरीडीन A

हाइड्राक्सिल समूहों की संख्या : 0·21 ग्राम नोडीफ्लोरीडीन A को 2-3 मिली० ऐसीटिक ऐनाहाइड्राइड तथा 0·3–0·4 ग्राम सोडियम ऐसीटेट के साथ 6–8 घंटे तक पश्चवाहित करके ऐसीटिलीकृत किया गया। अभिक्रिया मिश्रण को हिमशीतल जल में डाल कर तेजी से विलोडित किया गया जिससे एक तैलमय अवशेष ठोस बन गया। जल को निथार कर अवशेष को ठंडे जल से धोने के बाद उसे छान कर सुखा लिया गया। फिर इसे ऐल्कोहल से क्रिस्टलित किया गया तो गुलाबी भूरे क्रिस्टल (गलनांक 109-110°) प्राप्त हुये।

$C_{24}H_{26}O_8$ के लिये परिगणित मान : C 65·15, H 5·88,
ऐसीटिल (एक समूह) 9·5

प्राप्त मान : C 65·45, H 5·68, ऐसीटिल 9·8

नोडीफ्लोरीडीन A का आक्सीकरण

15 ग्राम नोडीफ्लोरीडीन A को 15 मिली० सान्द्र नाइट्रिक अम्ल के साथ मिश्रित करके 5–6 घंटे तक पश्चवाहित किया गया। फिर अभिक्रिया मिश्रण को हिमशीतल जल में डाल कर तब तक सोडियम बाइकार्बोनेट का संतृप्त विलयन डाला गया जब तक कि विलयन उदासीन नहीं हो गया। विलयन को सान्द्रित करके अवशेष को गरम ऐल्कोहल में विलयित किया गया। ठंडा करने पर एक ठोस (B) गलनाँक

208°) विलग हो गया। मातृद्रव को और अधिक सान्द्रित करने पर एक ठोस A मिला जिसे पुन: क्रिस्टलित किया गया (गलनांक 100·8°)

ठोस A : यह आक्सैलिक अम्ल निकला।

ठोस B : इसे ऐसीटोन से पुनः क्रिस्टलित किया गया (गलनांक 248°)

$C_9H_8O_6$ के लिये परिगणित मान : C 50·94, H 3·77, अणुभार 212, मेथाक्सिल समूह 14·62 कार्बोक्सिल समूह (दो) 42·4

प्राप्त मान : C 51·22, H 3·65, अणुभार 216, समूह 15·23, कार्बोक्सिल समूह 43·2 मेथाक्सिल

नोडीफ्लोरीडीन A का हाइड्रोजनीकरण

2 ग्राम नोडीफ्लोरीडीन A को 200 मिली० एथैनॉल में विलयित करके अभिक्रिया-मिश्रण में 0·5 ग्राम उत्प्रेरक ($Pd/CaCO_3$) डाल दिया गया। इस मिश्रण को 8 घंटे तक, जब तक कि हाइड्रोजन अवशोषण के कारण आयतन में और अधिक परिवर्तन नहीं देखा गया, हाइड्रोजनीकरण के लिये रख छोड़ा गया। फिर अभिक्रिया-मिश्रण को छान कर निर्वात में उसे सान्द्रित किया गया। इससे एक चिपचिपा ठोस प्राप्त हुआ जिसे क्रिस्टलित नहीं किया जा सका।

इस चिपचिपे ठोस को 20 मिली० नाइट्रिक अम्ल के साथ जल-अवगाह के ऊपर 6--8 घंटे तक पश्चवाहित किया गया और फिर अभिक्रिया-मिश्रण को हिमशीतल जल में डाल दिया गया। इसे सोडियम कार्बोनेट के संतृप्त विलयन द्वारा उदासीन बनाया गया। विलयन को निर्वात में सान्द्रित किया गया और गरम संतृप्त विलयन में से तीन ठोस (क, ख, ग) पृथक किये गये।

ठोस क : इसे ऐल्कोहल से पुनःक्रिस्टलित किया गया (गलनांक 95--96°)। यह ग्लुटैरिक अम्ल निकला।

ठोस ख : इसे ऐल्कोहल से पुनः क्रिस्टलित किया गया (गलनांक 102—104°)।

$C_7H_{12}O_4$ के लिये परिगणित मान : C 52.5, H 7.8, अणुभार 160

प्राप्त मान : C 52.9, H 7.8, अणुभार 168

गुणधर्मों के आधार पर यह हेप्टन डाइओयिक अम्ल प्रतीत हुआ किन्तु इसका विशुद्ध नमूना प्राप्त न होने के कारण इसकी पुष्टि नहीं हो सकी।

ठोस ग : इसे ऐसीटोन से पुनः क्रिस्टलित किया गया (गलनांक 248°)। इसका सूत्र $C_9H_8O_6$ निकला और यह नोडीफ्लोरीडीन A के आक्सीकरण से प्राप्त ठोस B के समान ही प्रतीत हुआ।

नोडीफ्लोरीडीन B

हाइड्राक्सिल समूह की संख्या : ऊपर दी गई विधि के अनुसार ऐसीटीलीकरण द्वारा लाल भूरा पत्तीदार यौगिक प्राप्त हुआ (गलनांक 137°)।

$C_{27}H_{30}O_{12}$ के लिये परिगणित मान : C 59·34 H 5·49, अणुभार 546, ऐसीटिल मान (3 समूहों के लिये) 23·07

प्राप्त मान : C 59·72, H 5·56, अणुभार 549, ऐसीटिल मान 23·65

नोडीफ्लोरीडीन B का आक्सीकरण

1·5 ग्राम पदार्थ को 15 मिली॰ सान्द्र नाइट्रिक अम्ल के साथ जलअवगाह पर 6–8 घंटे तक पश्चवाहित किया गया। इसके पश्चात् नोडीफ्लोरीडीन A के अन्तर्गत दी हुई क्रिया दुहराई गई। इससे तीन पदार्थ प्राप्त हुये :

(1) **ठोस अ** : ऐल्कोहल के साथ बारम्बार क्रिस्टलन द्वारा एक पदार्थ प्राप्त हुआ (गलनांक 100·6-100·8°) जो आक्सैलिक अम्ल निकला।

(2) **ठोस आ** : अशुद्ध प्रभाज को ऐल्कोहल से क्रिस्टलित किया गया (गलनांक 95·5-95.9°)। यह ग्लुटैरिक अम्ल निकला।

(3) **ठोस इ** : ऐसीटोन से अशुद्ध प्रभाज का पुनः क्रिस्टलन किया गया (गलनांक 253°)।

$C_9H_8O_8$ के लिये परिगणित मान : C 44.26, H 3.27, अणु भार 244, मेथाक्सिल समूह (एक) 12.7 कार्बोक्सिल समूह (दो) 36.8

प्राप्त मान : C 44.48, H 3.47, अणुभार 251, मेथाक्सिल समूह 12.85, कार्बोक्सिल समूह 37.2.

नोडीफ्लोरीडीन B का हाइड्रोजनीकरण

नोडीफ्लोरीडीन A की ही भाँति 2.2 ग्राम नोडोफ्लोरीडीन लेकर हाइड्रोजनीकरण की क्रिया सम्पन्न की गई। हाइड्रोजन के तीन अणु अवशोषित हुये। अशुद्ध हाइड्रोजनीकृत पदार्थ को नाइट्रिक अम्ल द्वारा आक्सीकृत किया गया। अन्त में प्रभाजी क्रिस्टलन द्वारा तीन पदार्थ प्राप्त हुये :-

पदार्थ (i) इसे ऐल्कोहल से क्रिस्टलित करने पर जो पदार्थ प्राप्त हुआ (गलनांक 95-96°) वह ग्लुटैरिक अम्ल निकला।

पदार्थ (ii) इसे ऐल्कोहल से क्रिस्टलित करने पर जो पदार्थ मिला (गलनांक 102-104°) वह हाइड्रोजनीकृत नोडीफ्लोरीडीन A के ग्राक्सीकरण से प्राप्त पदार्थ हेप्टेन डाइग्रोयिक ग्रम्ल के समान निकला।

पदार्थ (iii) इसे ऐसीटोन से क्रिस्टलित किया गया (गलनांक 253°)। यह $C_9 H_8 O_8$ ग्रम्ल समान है जो नोडीफ्लोरीडीन B के ग्राक्सीकरण से प्राप्त ठोस (इ) है।

निर्देश

1. जोशी, भुवनचन्द्र। **डी० फिल्० थीसिसि, प्रयाग विश्वविद्यालय,** 1956.
2. जोशी, बी० सी० तथा भाकुनी, डी० एस०। **जर्न० सांइंटि० इंड० रिसर्च०,** 1959, **18 B,** 523.
3. गूल्ड, रैस्ट्रिक। **बायोकेमि० जर्न०,** 1935, **28,** 1640.
4. रैस्ट्रिक तथा राबिन्सन। **जर्न केमि० सोसा०,** 1938, 2056.
5. क्रेंकशैंक तथा राबिन्सन। **वही,** 1938 2064.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 11, No 4, Oct. 1968, Pages 225-234

माइजर परिवर्त से सम्बद्ध प्रमेय

आर० डी० अग्रवाल
गणित विभाग, एस०ए०टी०आई०, विदिशा

[प्राप्त-मार्च 3, 1968]

सारांश

प्रस्तुत निबंध का उद्देश्य माइजर परिवर्त एवं लैपलास परिवर्त तथा सार्वीकृत लैपलास परिवर्त से दो प्रमेयों की स्थापना करना है। इन प्रमेयों द्वारा माइजर परिवर्त एवं सार्वीकृत लैपलास परिवर्त को विभिन्न कार्यकर्ताओं द्वारा प्राप्त परिवर्तों के द्वारा स्थानान्तरित करके कई रोचक विशिष्ट दशाएँ प्राप्त की जा सकती हैं किन्तु यहाँ हम प्रमेयों द्वारा प्राप्त नवीन समाकल ही प्रस्तुत करेंगे।

Abstract

Theorems on Meijer transforms. *By* R. D. Agrawal, Department of Mathematics, S. A. Tech. Institute, Vidisha (M.P.).

The object of the present paper is to establish theorems connecting Meijer transform with Laplace and generalised Laplace transform. Many interesting particular cases can be obtained by giving particular values to Meijer and generalised Laplace transform. However, we have evaluated here some new integrals only.

1. विषय प्रवेश :– अग्रवाल[1] ने, लैपलास परिवर्त को जो पारिभाषित है

$$\phi(p)=p\int_0^\infty e^{-pt}f(t)\,dt \tag{1·1}$$

सार्वीकृत किया है जो इस प्रकार है :—

$$\phi(p)=p\int_0^\infty (pt)^{-\lambda-1/2}\,e^{-1/2pt}M_{k+1/2,\,\mu}(pt)\,f(t)\,dt \tag{1·2}$$

यदि हम (1·2) में ($k=\mu=\lambda$ रखें तो वह (1·1) में लघुकरित होगा।

माइजर परिवर्त इस प्रकार पारिभाषित है :

$$\phi(p)=p\int_0^\infty (pt)^{-k-1/2}\, e^{-1/2pt}\, W_{k+1/2,\,\mu}\,(pt)\, f(t)\; dt \tag{1·3}$$

यदि हम (1.3) में $k=\mu$ रखें तो वह (1·1) में लघुकरित होगा। (1·1), (1·2) और (1·3) को क्रम से निम्नांकित प्रकार से दर्शाया जावेगा :-

$$\phi(p)\doteq f(t)\ ;\ \phi(p)\,\frac{M}{\overline{\lambda,\,k+\frac{1}{2},\,\mu}}\,f(t)\ ;\ \phi(p)\,\frac{W}{\overline{k+\frac{1}{2},\,\mu}}\,f(t)$$

फाक्स के H-फलन की जो परिभाषा प्रयोग में लाई गई है वह इस प्रकार है :—

$$H_{p,\,q}^{m,\,n}\left[\,x\,\middle|\begin{matrix}(a_1,\,e_1),\,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\,(a_p,\,e_p)\\(b_1,\,f_1),\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\,(b_q,f_q)\end{matrix}\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\prod\limits_{j=1}^{m}\Gamma(b_i-f_j\xi)\prod\limits_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_i+e_j\xi)}{\prod\limits_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_i+f_j\xi)\prod\limits_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_i-e_j\xi)}\,x^{\xi}\,d\xi$$

जहाँ पर खाली गुणनफल हो वह 1 होगा यदि $0\leqslant m\leqslant q,\ 0\leqslant n\leqslant p$.

सब $e's$ और $f's$ धनात्मक हैं, L बारने प्रकार का कंटूर इस तरह है कि $\Gamma(b_j-f_j\,\xi)$; $j=1, 2, \ldots, m$; के पोल कंटूर के दाहिने तरफ हों और $\Gamma(1-aj+ej\xi)$; $j=1, 2, \ldots, n$ के सब पोल कंटूर के बाएं तरफ हों। प्राचल भी इस प्रकार प्रतिबद्ध हो कि समाकल अभिसारी हो।

जब सब $e's$ और $f's$, s के बराबर हों उस समय H-फलन और G-फलन इस प्रकार संबंधित हैं :-

$$H_{p,\,q}^{m,\,n}\left[\,x\,\middle|\begin{matrix}(a_1,\,s),\,\ldots,\,(a_p,\,s)\\(b_1,\,s),\,\ldots,\,(b_q,\,s)\end{matrix}\right]=\frac{1}{s}\,G_{p,\,q}^{m,\,n}\left(x^{1/s}\middle|\begin{matrix}a_1,\,\ldots,\,a_p\\b_1,\,\ldots,\,b_q\end{matrix}\right)$$

जहाँ s धन पूर्ण संख्या है।

2. प्रमेय

यदि
$$\phi(p)\doteq t^{\rho-k}\,f(t) \tag{2·1}$$

और
$$\psi(p)\,\frac{W}{\overline{k+\frac{1}{2},\,\mu}}\,t^{\rho+1}\,I_{2\mu}(2at^{1/2})\,f(t) \tag{2·2}$$

तब
$$\psi(\alpha)=\frac{a^{-k-1/2}}{a\Gamma(2\mu+1)\Gamma(-\mu-k)}\int_0^\infty t^{-k-1/2}\,(\alpha+t)^{k-1/2}\,e^{-a^2(2t+\alpha)/2t(t+\alpha)}$$
$$M_{k+1/2,\,\mu}\left\{\frac{a^2\alpha}{t(t+\alpha)}\right\}\phi(t+\alpha)\;dt$$

जहां $R_e\, p>0, R_e\, \alpha>0$; $R_e(a^2)>0$; तथा $t^{\rho-k}f(t)$ का लैपलास परिवर्त और $t^{\rho+1} I_{2\mu}(2at^{1/2})f(t)$ के माइजर परिवर्त का अस्तित्व हो।

उपपत्ति :—राठी[9] ने दर्शाया है कि

$$p^{3/2}\, I_{2\mu}(ap^{1/2})\, e^{ap/2}\, W_{k,\,\mu}(p\alpha) \doteqdot \frac{2t^{-k}(t+\alpha)^k}{a\Gamma(2\mu+1)\,\Gamma(-\mu-k)}$$

$$\times e^{-\{(2t+\alpha)a^2/8t(t+\alpha)\}}\, M_{k,\mu}\left\{\frac{a^2\alpha}{4t(t+\alpha)}\right\} \tag{2·4}$$

जहाँ $Re\, p>0$, $Re\, \alpha>0$ $Re\,(a^2)>0$;

$(2\cdot1)$ लैपलास के गुण के द्वारा,

$$\frac{p}{p+\alpha}\,\phi(p+\alpha) \doteqdot e^{-\alpha t} f(t) \tag{2·5}$$

अब $(2\cdot4)$ तथा $(2\cdot5)$ में पार्सेवल और गोल्डस्टीन के प्रमेय का प्रयोग करने पर तथा $(2\cdot2)$ की सहायता से विवेचना करने पर वांछित प्रमेय प्राप्त होगा।

विशिष्ट दशा

$k=\mu$ लेने पर उपर्युक्त प्रमेय विघटित होगा,

यदि $\phi(p) \doteqdot t^{\rho-\mu} f(t)$

और $\psi(p) \doteqdot t^{\rho+1}\, I_{2\mu}(2at^{1/2})\, f(t)$

तब
$$\psi(\alpha) = \frac{a^{2\mu}}{\Gamma(2\mu+1)\,\Gamma(-2\mu)} \int_0^\infty t^{-2k-2}\,(1+\alpha/t)^{-1}\, e^{-a^2/t}\,\psi(t+\alpha)\, dt$$

जहाँ $Re\, p>c, Re\, \alpha>0$; $Re\,(a^2)>0$ तथा $t^{\rho-\mu} f(t)$ और $t^{\rho+1} f(t)\, I_{2\mu}(2at)$ के लैपलास परिवर्त का अस्तित्व हो।

उदाहरण 1 :

माना कि

$$f(t) = H^{m,\,n}_{\gamma,\,q}\left[zt^{\sigma}\middle|\begin{matrix}(a_1\, e_1), \ldots\ldots\ldots, (a\gamma, e_\gamma)\\ (b_1, f_1), \ldots\ldots\ldots, (b_q, f_q)\end{matrix}\right]$$

तब गुप्ता[6] के द्वारा

$$\phi(p) = \frac{1}{p^{\rho-k}}\, H^{m,\,n+1}_{r+1,\,q}\left[\frac{z}{p^{\sigma}}\middle|\begin{matrix}(\rho-k, \sigma), (a_1, \rho_1), \ldots, (a_\gamma, e_\gamma)\\ (b_1, f_1), \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, (b_q, f_q)\end{matrix}\right]$$

यदि $Re\, p>0,\ Re\, \sigma>0;\ Re\left(\rho-k+1+\sigma\, min\frac{b_h}{f_h}\right)>0\ \ (h=1, 2,\dots m)$

और निम्नांकित में से एक शर्त तुष्ट हो :–

1. $\lambda'>0;\ \ |arg\, z|<\frac{\lambda'\pi}{2}$

2. $\lambda'\geqslant 0:\ \ |arg\, z|<\frac{\lambda'\pi}{2}\ ;\ Re(\mu'+1)<0$

जहाँ λ' और μ' क्रम से ये राशियाँ दर्शावेंगी

$$\sum_{j=1}^{n} e_j-\sum_{j=n+1}^{p} e_j+\sum_{j=1}^{m} f_j-\sum_{j=m+1}^{q} f_j \quad \text{तथा} \quad \tfrac{1}{2}(p-q)+\sum_{j=1}^{p}(a_j)-\sum_{j=1}^{q}(b_j)$$

अब

$$\psi(p)=p\int_0^\infty (pt)^{-k-1/2}\, e^{-1/2pt}\, W_{k+1/2,\,\mu}(pt)\, t^{\rho+1}\, I_{2\mu}(2at^{1/2})$$
$$\times H^{m,n}_{\gamma,q}\left[zt^{\sigma}\middle|\begin{matrix}(a_1, e_1), \dots\dots\dots, (a_\gamma, e_\gamma)\\(b_1, f_1), \dots\dots\dots, (b_q, f_q)\end{matrix}\right] dt$$

उपर्युक्त समाकल का मान निकालने के लिये हमें $I_{2\mu}(2at^{1/2})$ का प्रसार करना होगा। दर्शायी हुई दशाओं में समाकल और संकलन पूर्णतः अभिसारी है अतः हम समाकलन और संकलन के क्रम को द ला वाली पूसिन के प्रमेय द्वारा उलट सकते हैं। गुप्ता[6] के द्वारा संकलन को हल करने पर

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(a)^{2\mu+2r}}{r!\,\Gamma(r+2\mu+1)}\cdot\frac{1}{p^{\rho+\mu+r}}$$

$$\times H^{m,n+2}_{\gamma+2,q+1}\left[\frac{z}{p^{\sigma}}\middle|\begin{matrix}(k-\rho-r-1, \sigma), (k-\rho-r-2\mu-1, \sigma), (a_1\, e_1), \dots, (a_\gamma, e_\gamma)\\(b_1, f_1), \dots, (b_q, f_q), (2k-\mu-\rho-r-1, \sigma)\end{matrix}\right]$$

यदि $Re(\sigma)>0,\ Re\, p>0; Re\left(\mu+\rho-k\pm\mu+2+\sigma\, min\frac{b_h}{f_h}\right)>0\ \ (h=1, 2, \dots m)$

और निम्नांकित एक शर्त तुष्ट हो

1. $\lambda'>0\ ;\ |arg\, z|<\frac{\lambda'\pi}{2}$

2. $\lambda'\geqslant 0\ ;\ |arg\, z|\leqslant\frac{\lambda'\pi}{2}\ ;\ Re(\mu'+1)<0\ ;\ Re\left(\mu'+\rho+\mu+\frac{5}{2}\right)<0$

जहाँ λ' और μ' का मान ऊपर की भाँति है।

उपर्युक्त मान (2.3) में रखने और सरल करने पर

$$\int_0^\infty t^{-k-1/2}(t+a)^{2k-\rho-1/2}\, e^{-a^2(2t+\alpha)/t(t+\alpha)}\, M_{k+1/2,\mu}\left\{\frac{a^2\alpha}{t(t+\alpha)}\right\}$$

$$\times H^{m,\, n+1}_{\gamma+1,\, q}\left[\frac{z}{(t+a)^\sigma}\middle|\begin{matrix}(\rho-k,\, \sigma),\, (a_1,\, e_1),\, \ldots,\, (a_\gamma,\, e_\gamma)\\ (b_1,\, f_1),\, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\, (b_q,\, f_q)\end{matrix}\right] dt$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\Gamma(-\mu-k)\ \Gamma(2\mu+1)\ a^{2\mu+2r+1}}{a^{2r-k-1/2+\mu+\rho}\ \Gamma(2\mu+r+1)\ r!}\times$$

$$H^{m,\, n+2}_{r+2,\, q+1}\left[\frac{z}{a^\sigma}\middle|\begin{matrix}(k-\rho-r-1),\, (k-\rho-r-2\mu-1,\, \sigma),\, (a_1,\, e_1),\, \ldots,\, (a_r,\, e_r)\\ (b_1, f_1),\, \ldots\, (b_q, f_q),\, (2k-\mu-r-\rho-1,\sigma)\end{matrix}\right]$$

यदि $Re\ \alpha>0,\ Re(\sigma)>0;\ Re(a^2)>0;\ Re\left\{\rho-k+1+\sigma\ min\frac{b_h}{f_h}\right\}>0\ (h=1,\, 2,\, \ldots,\, m)$

$$Re\left\{\rho+\mu+k\pm\mu+2+\sigma\ min\frac{b_h}{f_h}\right\}>0\ ;\ (h=1,\, 2,\, \ldots,\, m)$$

और A में दर्शायी शर्तों में से एक तुष्ट हो।

विशिष्ट दशाएँ

सब $e's$ और $f's$ का मान σ के बराबर लेने पर ऊपर का समाकल निम्न रूप में विघटित होगा :—

$$\int_0^\infty t^{-k-1/2}(t+a)^{2k-\rho-1/2}\ e^{-a^2(2t+\alpha)/t(t+\alpha)}\ M_{k+1/2,\ \mu}\left\{\frac{a^2\alpha}{t(t+\alpha)}\right\}\times$$

$$G^{m,\, n+1}_{\gamma+1,\, q}\left(\frac{z}{t+a}\middle|\begin{matrix}\rho-k,\, a_1,\, \ldots,\, a_\gamma\\ b_1,\, \ldots,\, b_q\end{matrix}\right) dt$$

$$=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\Gamma(-\mu-k)\ \Gamma(2\mu+1)\ a^{2\mu+2r+1}}{\Gamma(2\mu+r+1)a^{\mu+\rho+2r-k-1/2}\ r!}$$

$$\times G^{m,\, n+2}_{\gamma+2,\, q+1}\left(\frac{z}{a}\middle|\begin{matrix}(k-\rho-r-1),\, (k-\rho-2\mu-r-1),\, a_1,\, \ldots,\, a_\gamma\\ b_1,\, \ldots,\, b_q,\, (2k-\mu-\rho-r-1)\end{matrix}\right)$$

यदि $Re\ \alpha>0,\ Re(a^2)>0;\ Re\{\rho+\mu-k\pm\mu+2+min\ b_n\}>0\quad (h=1,\, 2,\, \ldots m)$

$$Re\{\rho-k+1+min\ b_n\}>0\ ;\ (h=1, 2, \ldots m)$$

उदाहरण 2 :

माना कि

$$f(t)={}_rF_s\left[\begin{matrix}a_1,\, \ldots\ldots\ldots,\, a_r\\ \beta_1\ldots\ldots\ldots,\, \beta_s\end{matrix};\ \pm t^2\right]$$

मुकर्जी[8] के अनुसार,

$$\phi(p)=\frac{\Gamma(\rho-2k+1\pm k)}{\Gamma(\rho-3k+1)}\,p^{k-\rho}\times$$

$$_{r+4}F_{s+2}\left[\begin{matrix}\alpha_1,\,\ldots,\,\alpha_\gamma,\,\tfrac{1}{2}(\rho-2k+1\pm k),\,\tfrac{1}{2}(\rho-2k+2\pm k)\\ \beta_1,\,\ldots\,\beta_s,\,\tfrac{1}{2}(\rho-3k+1),\,\tfrac{1}{2}(\rho-3k+1)\end{matrix};\pm\frac{4}{p^2}\right]$$

यदि $Re\,p>0$, जब $s>\gamma+1$. $Re(\rho-k)>0$ तथा $Re\,p>1$ जब $s=\gamma+1$

अब
$$\psi(p)=\int_0^\infty (pt)^{-k-1/2}\,e^{-1/2pt}\,W_{k+1/2,\,\mu}(pt)\,t^{\rho+1}\times$$

$$I_{2\mu}(2at^{1/2})\ {}_rF_s\left[\begin{matrix}\alpha_1,\,\ldots\ldots\ldots,\,\alpha_r\\ \beta_1,\,\ldots\ldots\ldots,\,\beta_s\end{matrix};\pm t^2\right]dt$$

उपर्युक्त समाकल का मान निकालने के लिये हमें $I_{2\mu}(2at^{1/2})$ का प्रसार करना होगा। दर्शायी हुई दशाओं में समाकल और संकलन पूर्णतः अभिसारी हैं, अतः हम समाकलन और संकलन के क्रम को द ला वाली पूस्नि के प्रमेय से उलट सकते हैं।

मुकर्जी[8] के अनुसार संकलन को हल करने पर

$$\psi(p)=\sum_{r=0}\frac{(a)^{2\mu+2r}\,\Gamma(\rho+\mu+r+2\pm\mu-k)}{\Gamma(2\mu+r+1)\Gamma(\rho+\mu+r+2-2k)\,r!}\,p^{-\rho-\mu-r}\times$$

$$_{r+4}F_{s+2}\left[\begin{matrix}\alpha_1,\,\ldots,\,\alpha_\gamma,\,\tfrac{1}{2}(\rho+\mu+r+2\pm\mu-k)\\ \beta_1,\,\ldots,\,\beta_s,\,\tfrac{1}{2}(\rho+\mu+r+1-2k)\end{matrix};\pm\frac{4}{p^2}\right]$$

यदि $Re\,p>0$, जब $r>r+1$ तथा $Re\,p>1$ जब $s=\gamma+1$, $Re(\rho+\mu+1\pm\mu-k)>0$
उपर्युक्त मान (2·3) में रखने और सरल करने पर

$$\int_0^\infty t^{-k-1/2}(t+\alpha)^{2k-\rho-1/2}\,e^{-a^2(2t+\alpha)/t(t+\alpha)}\,M_{k+1/2,\,\mu}\left\{\frac{a^2\alpha}{t(t+\alpha)}\right\}\times$$

$$_{\gamma+4}F_{s+2}\left[\begin{matrix}\alpha_1,\,\ldots,\,\alpha_r,\,\tfrac{1}{2}(\rho-2k+\pm k),\,\tfrac{1}{2}(\rho-2k+2\pm k)\\ \beta_1,\,\ldots,\,\beta_s,\,\tfrac{1}{2}(\rho-3k+1),\,\tfrac{1}{2}(\rho-3k+1)\end{matrix};\pm\frac{4}{(t+\alpha)^2}\right]dt$$

$$=\frac{\Gamma(2\mu+1)\ \Gamma(-\mu+k)}{\Gamma(\rho-k+1)\ \alpha^{\rho-k+\mu-1/2}}\sum_{\gamma=0}^\infty\frac{\Gamma(\rho+\mu+r+2\pm\mu-k)}{\Gamma(\rho+\mu+r+2-2k)}\ \frac{a^{2\mu+2r+1}}{r!\ \alpha^r}$$

$$_{r+4}F_{s+2}\left[\begin{matrix}\alpha_1,\,\ldots,\,\alpha_\gamma\ \tfrac{1}{2}(\rho+\mu+2\pm\mu+r-k),\,\tfrac{1}{2}(\rho+\mu+r+3\pm\mu-k)\\ \beta_1,\,\ldots,\,\beta_s\ \tfrac{1}{2}(\rho-2k+1+\mu+r),\,\tfrac{1}{2}(\rho+\mu+1-2k+r)\end{matrix};\pm\frac{4}{\alpha^2}\right]$$

यदि $Re(a^2)>0$. $Re\,\alpha>0$, जब $s>\gamma+1$ तथा $Re\,\alpha>1$ जब $s=\gamma+1$

$Re(\rho-k)>0$, $Re(\rho+\mu+1\pm\mu-k)>0$

3. **प्रमेय 2 :**

यदि
$$\phi(p, a) \underset{\lambda, k+\frac{1}{2}, \mu}{\overset{M}{=}} e^{-t} f(t/a) \tag{3·1}$$

और
$$\psi(p) \underset{m+\frac{1}{2}, \sigma}{\overset{W}{=}} t^{m-\lambda-\mu-1/2} f(t) \tag{3·2}$$

तब,
$$\psi(a) = \frac{\pi \Gamma(k+\frac{1}{2})\, a^{\lambda+\mu+1/2-m}}{\sin(-\pi\nu)\, \Gamma(2\mu+1)\, \Gamma\overline{k-\mu-\nu}\, \Gamma(k-\mu+\nu+1)} \int_0^\infty t^{\lambda-1}(1+t)^\mu$$

$$P_\nu^{-2\mu}(1+2t)\ \phi(t, a)\, dt$$

जहाँ $m=\mu-k-\frac{1}{2}$; $\sigma=\nu+\frac{1}{2}$

यदि $|arg\, a|<\pi$; $Re\,(\mu+\frac{1}{2})>0$; $Re\,(k-\mu)>|Re\,\nu|$ और $t^{-k-\lambda-1} f(t)$ के माइजर परिवर्त का अस्तित्व हो।

उपपत्ति :—[8; p. 493] सम्बंध को सरल करने पर

$$t^\lambda (1+t)^\mu P_\nu^{-2\mu}(1+2t) \underset{\lambda, k+\frac{1}{2}, \mu}{\overset{M}{=}} \frac{\sin(-\nu\pi)}{\pi\Gamma(k+\frac{1}{2})} \Gamma(2\mu+1)\, \Gamma(k-\mu-\nu)$$

$$\Gamma(k-\mu+\nu+1)\, e^{1/2p}\, p^{-\lambda-\mu}\, W_{\rho, \sigma}(p) \tag{3·4}$$

जहाँ $\rho=\mu-k$; $\sigma=\nu+\frac{1}{2}$

यदि $|arg\, p|<\pi$; $Re(\mu+\frac{1}{2})>0$; $Re(\mu-k)>|Re\,\nu|$

(3.1) और (3.2) में पार्सेवल और गोल्डस्टीन के प्रमेय का प्रयोग करने पर

$$\frac{\sin(-\pi\nu)}{\pi\Gamma(k+\frac{1}{2})} \Gamma(2\mu+1)\, \Gamma(k-\mu-\nu)\, \Gamma(k-\mu+\nu+1) \int_0^\infty e^{1/2t}\, W_{\rho,\pi}(t)\, t^{-\lambda-\mu-1}\, f\!\left(\frac{t}{a}\right) dt$$

$$= \int_0^\infty t^{\lambda-1}(1+t)^\mu P_\nu^{-2\mu}(1+2t)\, \phi(t, a)\, dt.$$

t तथा ρ का स्थानान्तरण क्रम से at तथा $m+\frac{1}{2}$ से बाए तरफ करने पर और (3·2) की सहायता से उसकी विवेचना करने पर वांछित प्रमेय प्राप्त होगा।

उदाहरण 1:

माना कि $f(t)=W_{l,s}(t)$

अग्रवाल[2] के फल के द्वारा

$$\phi(p, a)=\frac{\Gamma(\mu-\lambda+s+\frac{3}{2})\ \Gamma(\mu-\lambda-s+\frac{3}{2})\ p^{\mu-\lambda+1}(2a)^{-s-1/2}}{\Gamma(\mu-\lambda-k+\frac{3}{2})\quad (p+1+1/2a)^{\mu+s-\lambda+3/2}}$$

$$F^{7}\left[\begin{matrix} s+\mu-\lambda+\frac{3}{2}: \mu-k, \mu-\lambda-s+\frac{3}{2}\ ;\ s-l \\ \mu-\lambda-k+\frac{3}{2}:\ 2\mu+1 \end{matrix}\ ;\ \frac{p}{p+1+1/2a}, \frac{p+1-1/2a}{p+1+1/2a}\right]$$

यदि $Re(\mu-\lambda\pm s)>-\frac{1}{2}$; $Re(p+l+1/2b)>0$

जब कि F^7 संकलन अग्रवाल[3] के द्वारा इस प्रकार पारिभाषित है

$$F^{7}\left[\begin{matrix} c:\ a, b; d \\ f:\quad e \end{matrix}\ ; x, y\right]=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(a)_r\ (b)_r\ (c)_{r+s}\ (d)_s}{(f)_{r+s}\ (e)_r}\frac{x^r\ y^s}{r!\ s!}$$

और जब $a=e$ तब वह परिचित F^1 में लघुघटित होता है

$$F^{7}\left[\begin{matrix} c:\ a, b; d \\ f:\quad a \end{matrix}\ ; x, y\right]=F^{1}\left[\begin{matrix} c: \\ f: \end{matrix}\ b, d; x, y\right]$$

अब,

$$\psi(a)=a\int_0^{\infty}(ax)^{-m-1/2}\ e^{-1/2ax}\ x^{m-\lambda-\mu-1/2}\ W_{l, s}(x)\ W_{m+1/2, \sigma}(ax)\ dx$$

कुलश्रेष्ठ[7] ने दर्शाया है कि

$$\int_0^{\infty} x^{\lambda-1}\ e^{-\nu x}\ W_{k, m}(2\mu x)\ G^{\alpha, \beta}_{\gamma, \delta}\left(zx^n\middle|\begin{matrix} a_1, \dots\dots\dots, a_\gamma \\ b_1, \dots\dots\dots, b_\delta\end{matrix}\right)dx$$

$$=\frac{n^{\lambda+k-1/2}(2\mu)^{m+1/2}}{(2\pi)^{n-1/2}(\mu+\nu)^{\lambda+m+\frac{1}{2}}}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!}\left(\tfrac{1}{2}-k+m\right)_r\left(\frac{\nu-\mu}{\nu+\mu}\right)^r\times$$

$$G^{\alpha, \beta+2n}_{\gamma+2n, \delta+n}\left(\frac{zn^n}{(\mu+\nu)^n}\middle|\begin{matrix}1-\triangle(n, \frac{1}{2}+m+\lambda+r), 1-\triangle(n, \frac{1}{2}-m+\lambda), a_1, \dots, a_\gamma \\ b_1, \dots\dots\dots\dots\dots\dots, b_\delta, 1-\triangle(n, 1-k+\delta+r)\end{matrix}\right)$$

यदि $Re(\mu+\nu)>0$, $Re(1\pm m+\lambda)>0$, $Re(\mu)>0$, $\gamma<\delta$, $\beta\geqslant 1$

$2(\alpha+\beta)>(\gamma+\delta)$ तथा $|arg\ zx^n|<(\alpha+\beta-\frac{1}{2}\gamma-\frac{1}{2}\delta)\pi$

उपर्युक्त संकलन में $n=1, z=\nu=a, \alpha=2, \beta=1, \gamma=1, \delta=2, b=-m-\sigma, b_2=-m-\sigma, \mu=\frac{1}{2}$, $a_1=1$ और λ, k, m का स्थानान्तर क्रम से $m-\lambda-\mu+\frac{1}{2}$, l और s से करें। और निम्नलिखित संबंध

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}+m-k)\ \Gamma(\tfrac{1}{2}-m-k)\ x^l\ e^{1/2x}\ W_{k,m}(x)=G^{21}_{12}\left(x\middle|\begin{matrix}k+l+1 \\ l-m+\frac{1}{2}, l+m+\frac{1}{2}\end{matrix}\right)$$

का उपयोग करके हल करें तो

$$\psi(a)=\frac{a}{\Gamma(m-\sigma)\Gamma(-m-\sigma)}\frac{1}{(\frac{1}{2}+a)^{m-\lambda-\mu+s+1}}\times\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!}\left(\tfrac{1}{2}-l+s\right)_r$$

$$\times\left(\frac{-\frac{1}{2}+a}{\frac{1}{2}+a}\right)^r G_{3,3}^{2,3}\left(\frac{a}{\frac{1}{2}+a}\middle|\begin{matrix}\lambda+\mu-s-m-r,\ s-m+\lambda+\mu,\ 1\\ -m-\sigma,\ m-\sigma,\ l-m+\lambda+\mu-r-\frac{1}{2}\end{matrix}\right)$$

यदि $Re(a+\frac{1}{2})>0,\ Re(\frac{1}{2}+m\pm s-\lambda-\mu-\frac{1}{2})>0\ |arg\, ax|<\frac{3\pi}{2}$

उपर्युक्त मान (3·3) में रखने और सरल करने पर

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{\mu}(1+x)^{\mu}}{(1+x+1/2a)^{\mu+s-\lambda+3/2}}\,P_{\nu}^{-2\mu}(1+2x)$$

$$\times F_7\left[\begin{matrix}s+\mu-\lambda+\frac{3}{2}:\ \mu-k,\ \mu-\lambda-s+\frac{3}{2};\ s-l\\ \mu-\lambda-k+\frac{3}{2}:\qquad 2\mu+1\end{matrix};\ \frac{x}{1+x+1/2a};\ \frac{x+1-1/2a}{x+1+1/2a}\right]$$

$$=\frac{\Gamma(2\mu+1)\ \Gamma(k-\mu+\nu+1)\ \Gamma(k-\mu-\nu)\ \Gamma(\mu-\lambda-k+\frac{3}{2})\ \sin(-\pi\nu)\ 2^{s+1/2}}{\pi\Gamma(k+\frac{1}{2})\ \Gamma(m-\sigma)\ \Gamma(-m-\sigma)\ \Gamma(\mu-\lambda\pm s+\frac{3}{2})\ a^{\lambda+\mu-m-s-1}}\times$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\frac{1}{2}-l+s)_r}{r!}\left(\frac{a-\frac{1}{2}}{a+\frac{1}{2}}\right)^r G_{3,3}^{2,3}\left(\frac{a}{a+\frac{1}{2}}\middle|\begin{matrix}\lambda+\mu-s-m-r,\ \lambda+\mu+s-m;\ 1\\ -m-\sigma,\ m-\sigma,\ l-m+\lambda+\mu-r-\frac{1}{2}\end{matrix}\right)$$

यदि $Re(a+\frac{1}{2})>0,\ |arg\ a|<\pi\quad Re(\mu+\frac{1}{2})>0,\ Re(k-\mu)>|Re\ \nu|$

$Re(\frac{1}{2}\pm s+m-\lambda-\mu+\frac{1}{2})>0;\ Re(\mu-\lambda\pm s+\frac{1}{2})>0$

कृतज्ञता-ज्ञापन

प्रस्तुत शोध निबंध की तैयारी में डा० पी० एम० गुप्ता ने जो सहायता पहुँचाई तथा प्राचार्य वि० वि० नातू से जो प्रोत्साहन मिला उसके लिये लेखक उनका आभारी है।

निर्देश

1. अग्रवाल, आर० डी०। नेश० इंस्टी० साइं० (इंडिया) में प्रकाशनाधीन।

2. अग्रवाल, आर० डी०। वही।

3. वही। प्रकाशनार्थ प्रेषित।

4. एर्डेल्यी । Tables of Integral Transform. **भाग** I, 1954.

5. फाक्स, सी० । **ट्रांजै० अमे० मैथ० सोसा०**, 1961, **98,** 395-429.

6. गुप्ता, के० सी० । Annales de la soc. sci. de Bruxelles, 1965, 97-106.

7. कुलश्रेष्ठ, एस० के० । **पी०एच-डी० शोध प्रबन्ध, राजस्थान वि०वि०**, 1967.

8. मुकर्जी, एस० एन० । **बुले० कलकत्ता मैथ० सोसा०**, 1962, **54,** 185-201.

9. राठी, पी० एन० । **जर्न० लन्दन मैथ० सोसा०**, 1965, **40,** 367-69.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 11, No. 4, Oct. 1968, Pages 235-241

दो चलों के सार्वीकृत हैंकेल परिवर्त के कुछ उत्क्रमण सूत्र

राम शंकर पाठक तथा कमला कान्त सिंह
गणित विभाग, काशी हिन्दू विश्वविद्यालय
एवं
आदित्य नारायण
गवर्नमेन्ट कालिज, चकिया, वराणसी

[प्राप्त—अगस्त 22, 1968]

सारांश

इस अभिपत्र में दो चलों के सार्वीकृत हैंकेल परिवर्त के कुछ उत्क्रमण सूत्र निकाले गये हैं।

Abstract

Some inversion formulae for the generalized Hankel transforms of two variables. *By* R. S. Pathak and K. K. Singh, Mathematics Department, B. H. U. Varanasi and A. Narain, Government College, Cahkia, Varanasi.

In this paper two inversion formulae for the generalized Hankel transform of two variables

$$\phi(p, q)=\int_0^\infty\int_0^\infty (px)^{1/2}\, \mathcal{J}^{\mu_1}_{\nu_1, \lambda_1}(px) \times (qy)^{1/2}\, \mathcal{J}^{\mu_2}_{\nu_2, \lambda_2}(qy)+f(x, y)\, dx\, dy$$

have been obtained which is an extension of the generalized Hankel transform of one variable studied by Pathak.[1]

पाठक[1] ने हैंकेल परिवर्त को निम्नलिखित सार्वीकृत रूप दिया था :

$$f(x)=\int_0^\infty (xy)^{1/2}\, \mathcal{J}^{\mu}_{\nu, \lambda}(xy)\, g(y)\, dy \tag{1·1}$$

जिसमें

$$\mathcal{J}^{\mu}_{\nu,\lambda}(x)=\sum_{\gamma=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\gamma}\,(\frac{1}{2}x)^{\nu+2\gamma+2\lambda}}{\Gamma(1+\lambda+\gamma)\Gamma(1+\lambda+\mu\gamma)}, \ (\mu>0)$$

(1.1) में जब $\mu=1$ लेते हैं तो वह लोमेल परिवर्त[2] में और जब $\lambda=0$ तो सार्वीकृत हैंकेल परिवर्त[3] में संक्षिप्त हो जाता।

यदि अष्टियों

$$K_1(px)=(px)^{1/2}\ \mathcal{J}^{\mu_1}_{\nu_1,\lambda_1}(px)$$

$$K_2(qy)=(qy)^{1/2}\ \mathcal{J}^{\mu_2}_{\nu_2,\lambda_2}(qy)$$

की सहायता से द्विक समाकल का रूपान्तरण किया जाय तो हम समाकल समीकरण

$$\phi(p,q)=\int_0^\infty\int_0^\infty K_1(px)\,K_2(qy)\,f(x,y)\,dx\,dy$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty (px)^{1/2}\,\mathcal{J}^{\mu_1}_{\nu_1,\lambda_1}(px)(qy)^{1/2}\ \mathcal{J}^{\mu_2}_{\nu_2,\lambda_2}(qy)\,f(x,y)\,dx\,dy. \tag{1·2}$$

प्राप्त करते हैं।

इस अभिपत्र का उद्देश्य (1·2) के उत्क्रमण सूत्र निकालना है।

प्रथम उत्क्रमण सूत्र

(1·2) से दोनों ओर $p^{-n_1}\times q^{-n_2}$ से गुणा करने पर तथा p और q के सापेक्ष समाकलन करने पर हमें

$$I=\int_0^\infty\int_0^\infty \phi(p,q)\,p^{-n_1}\,q^{-n_2}\,dp\,dq$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty p^{-n_1}\ q^{-n_2}\,dp\,dq\times\ \int_0^\infty\int_0^\infty (px)^{1/2}\,(qy)^{1/2}\ \mathcal{J}^{\mu_1}_{\nu_1,\lambda_1}(px)\ \mathcal{J}^{\mu_2}_{\nu_2,\lambda_2}(qy)\,f(x,y)\,dx\,dy$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty (xy)^{1/2}f(x,y)\,dx\,dy\ \int_0^\infty\int_0^\infty p^{1/2-n_1}\,q^{1/2-n_2}\,\mathcal{J}^{\mu_1}_{\nu_1,\lambda_1}(px)\,\mathcal{J}^{\mu_2}_{\nu_2,\lambda_2}(qy)\,dp\,dq$$

प्राप्त होता है। यदि समाकलन का उत्क्रमण न्यायसंगत हो तो आंतरिक द्विक समाकल[4]

$$\int_0^\infty x^{\rho-1}\,\mathcal{J}^{\mu}_{\nu,\lambda}(sx)\,dx=\frac{2^{\rho-1}s^{-\rho}\,\Gamma\!\left(\frac{\nu+\rho}{2}+\nu\right)\Gamma\!\left[1-\left(\lambda+\frac{\nu+\rho}{2}\right)\right]}{\Gamma\!\left[1+\nu+\lambda-\mu\left(\frac{\nu+\rho}{2}+\lambda\right)\right]\,\Gamma\!\left(1-\frac{\nu+\rho}{2}\right)}$$

जिसमें $0<R(\nu+\rho+2\lambda)<2$, $0<\mu\leqslant1$ और जब $\mu=1$ तो अतिरिक्त शर्त $R(\rho+\lambda)<3/2$, $s>0$ है, की सहायता से हल करने पर

$$I=\frac{2^{1-n_1-n_2}\,\Gamma\left\{\frac{\nu_1+3/2-n_1}{2}+\nu_1\right\}\Gamma\left\{1-\left(\lambda_1+\nu_1+3/2-n_1\right)\right\}}{\Gamma\left\{1+\nu_1+\lambda_1-\mu_1\left(\frac{\nu_1+3/2-n_1}{2}+\lambda_1\right)\right\}\Gamma\left\{1-\frac{\nu_1+3/2-n_1}{2}\right\}\Gamma\left\{1-\frac{\nu_1+3/2-n_2}{2}\right\}}$$

$$\times\frac{\Gamma\left\{\frac{\nu_2+3/2-n_2}{2}+\nu_2\right\}\Gamma\left\{1-\left(\lambda_2+\frac{\nu_2+3/2-n}{2}\right\}}{\Gamma\left\{1+\nu_2+\lambda_2-\mu_2\left(\frac{\nu_2+3/2-n_2}{2}\right)\right.}\times\int_0^\infty\int_0^\infty x^{n_1-1}\,y^{n_2-1}\,f(x,y)\,dx\,dy \tag{1·3}$$

प्रात होता है।

अब द्विक मैलिन उत्क्रमण सूत्र[5] की सहायता से हम

$$f(x,y)=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty}\int_{c_2-i\infty}^{c_2+i\infty}\frac{\Gamma\left\{1+\nu_1+\lambda_1-\mu_1\left(\frac{\nu_1+3/2-n_1}{2}+\lambda_1\right)\right\}\Gamma\left\{1-\frac{\nu_1+3/2-n_1}{2}\right\}}{2^{1-n_1-n_2}\,\Gamma\left\{\frac{\nu_1+3/2-n_1}{2}+\nu_1\right\}\Gamma\left\{1-\left(\lambda_1+\frac{\nu_1+3/2-n_1}{2}\right)\right\}}$$

$$\times\frac{\Gamma\left\{1+\nu_2+\lambda_2-\mu_2\left(\frac{\nu_2+3/2-n_2}{2}+\lambda_2\right)\right.\Gamma\left\{1-\frac{\nu_2+3/2-n_2}{2}\right\}}{\Gamma\left\{\frac{\nu_2+3/2-n_2}{2}+\nu_2\right\}\Gamma\left\{1-\left(\lambda_2+\frac{\nu_2+3/2-n_2}{2}\right)\right\}}\times x^{-n_1}\,y^{-n_2}\,dn_1\,dn_2 \tag{1·4}$$

प्राप्त करते हैं, जिसमें

(i) $\psi(n_1, n_2)=\int_0^\infty\int_0^\infty p^{-n_1}\,q^{-n_2}\,\phi(p,q)\,dp\,dq$ और $F(x,y)$ खंडशः सतत है, (1·5)

(ii) द्विक समाकल $\int_0^\infty\int_0^\infty x^{-n_1}\,y^{-n_2}\,\phi(x,y)\,dx\,dy$ परम अभिसारी है।

और (iii) द्विक समाकल $\int_0^\infty\int_0^\infty x^{c_1-1}\,y^{c_2-1}\,f(xy)\,dx\,dy$ भी परम अभिसारी है।

जिसमें $n\gamma=c\gamma+it\gamma$, $-\infty<t\gamma<\infty$, $\gamma=1,2$, समाकलन के क्रम का उत्क्रमण निम्नलिखित विधि से न्यायसंगत सिद्ध किया जा सकता है।

माना $f(x,y)=O(x^{\rho_1}, y^{\rho_2})$ जिसमें x और y लघु संख्यायें हैं और x के लघु मानों के लिये

$$\mathcal{J}_{\nu,\lambda}^{\mu}(x)=O(x^{\nu+2\lambda})\quad \text{तो}$$

द्विक समाकल $I_1(p, q)=p^{1/2-n_1} q^{1/2-n_2} \int_0^{\epsilon_1}\int_0^{\epsilon_2} x^{1/2} y^{1/2} \mathcal{J}_{\nu_1,\lambda_1}^{\mu_1}(px)$

$$\times \mathcal{J}_{\nu_2,\lambda_2}^{\nu_1}(qy) f(x, y)\, dx\, dy$$

जिसमें ϵ_1, ϵ_2 लघुसंख्यायें हैं, एकरूपतः अभिसारी होगा यदि $p \geqslant 0, q \geqslant 0;$

$$R(\nu_\gamma+2\lambda_\gamma+\rho_\gamma)>-3/2, \quad (\gamma=1, 2)$$

इसी प्रकार द्विक समाकल भी

$$I_2(x, y)=x^{1/2} y^{1/2} f(x, y) \int_0^{\epsilon_3}\int_0^{\epsilon_4} p^{1/2-n_1} q^{1/2-n_2}$$

$$\times \mathcal{J}_{\nu_1, \lambda_1}^{\mu_1}(px)\ \mathcal{J}_{\nu_2, \lambda_2}^{\mu_2}(qy)\, dp\, dq$$

जिसमें ϵ_3, ϵ_4 लघुसंख्यायें हैं, एकरूपतः अभिसारी होगा यदि

$$x \geqslant 0,\ y \geqslant 0;\ R(\nu_\gamma+2\lambda_\gamma-n\gamma)>-\tfrac{3}{2} \quad (\gamma=1, 2)$$

हम जानते हैं कि x और y के वृहद मानों के लिये (पाठक[1])

$$(a) \quad \mathcal{J}_{\nu,\lambda}^{\mu}(x) \sim x^{\nu+2\lambda-2\kappa(\nu+2\lambda+1/2)} \exp\left\{\left(\mu \frac{x^2}{4}\right)^{K} \frac{\cos \pi K}{\mu K}\right\}$$

जिसमें $\mu>1$, और $K=\frac{1}{1+\mu}$

$$(b) \quad \mathcal{J}_{\nu,\lambda}^{\mu}(x) \sim x^{\nu+2\lambda-2k(\nu+2\lambda+1/2)} \exp\left\{\left(\mu \frac{x^2}{4}\right)^{K} \frac{\cos \pi K}{\mu K}\right\}$$

$$+\frac{x^{\nu+2\lambda-2}}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\nu+\lambda-\mu+1)}$$

जिसमें $0<\mu \leqslant 1$ और $K=\frac{1}{1+\mu}$

और यदि x और y के वृहद मानों के लिये

$$f(x, y)=O\{\exp(-p^{n_1}), \exp(-y^{\eta_2})\}$$

हो तो

$$\left|\int_{T_1}^{\infty}\int_{T_2}^{\infty} x^{1/2} y^{1/2} f(x, y)\, dx\, dy \int_{T_3}^{\infty}\int_{T_4}^{\infty} p^{1/2-n_1} q^{1/2-n_2} \times \mathcal{J}_{\nu_1,\lambda_1}^{\mu_1}(px)\ \mathcal{J}_{\nu_1,\lambda_2}^{\mu_2}(qy)\, dp\, dy\right|$$

जिसमें T_1, T_2, T_3 और T_4 वृहद संख्यायें हैं,

समाकल $\int_{T_1}^{\infty}\int_{T_2}^{\infty}\left|x^{1/2} y^{1/2} \exp(-x^{n_1}) \exp(-y^{n_2})\right| dx\, dy \times \int_{T_3}^{\infty}\int_{T_4}^{\infty}\Big|p^{-n_1+1/2}$

$$\times q^{-n_2+1/2}\left[p^{\nu_1+2\lambda_1-2k_1(\nu_1+2\lambda_1+1/2)} \exp\left[\left\{\frac{\mu_1(px)^2}{4}\right\}\frac{K_1 \cos \pi K_1}{\mu_1 K_1}\right]+\frac{p^{\nu_1+2\lambda_1-2}}{\Gamma(\lambda_1)\Gamma(\nu_1+\lambda_1-\mu_1+1)}\right)$$

$$\times\left[q^{\nu_2+2\lambda_2-2k(\nu_2+2\lambda_2+1/2)} \exp\left|\left\{\frac{\mu_2(qy)^2}{4}\right\}\frac{K_2 \cos \pi K_2}{\mu_2 K_2}\right]+\frac{q^{\nu_2 2+\lambda_2-2}}{\Gamma(\lambda_2)\Gamma(\nu_2+\lambda_2-\mu_2+1)} \times dp\, dq\right|$$

के किसी अचर अपवर्त्य से अधिक नहीं होगा,

जिसमें $K_1=\frac{1}{1+\mu_1}$, $K_2=\frac{1}{1+\mu_2}$, $0<\mu_1, \mu_2<1$; भी अभिसारी होगा

यदि

$$R(n_1, n_2)>0,\ 0<R(\mu_1), R(\mu_2)<1, R(\lambda_\gamma), R(\nu_\gamma+\lambda_\gamma-\mu_\gamma+1)\neq 0, -1, -2$$
$$(\gamma=1, 2),\ R(\nu_1+2\lambda_1-n_1)<\tfrac{1}{2}, R(\nu_2+2\lambda_2-n_2)<\tfrac{1}{2}$$

और अतिरिक्त शर्त $n_1, n_2>1$ जब $\mu=1$

द्वितीय उत्क्रमण सूत्र

पाठक[1] ने (1.1) का निम्नलिखित उत्क्रमण सूत्र दिया है

$$g(x)=\frac{(-1)^n\sqrt{(2)}}{\mu}\int_0^{\infty}\left(\frac{xy}{2}\right)^{2/\mu(\nu+n+1)-\nu-2n-3/2} \times \mathcal{J}^{1/\mu}_{(\nu+n+1/\mu)-n-1}\left[\left(\frac{xy}{2}\right)^{2/\mu}\right] f(y)\, dy \tag{1·6}$$

जिसमें $g(x)=O(e^{-x^2})$ x के वृहद मानों के लिये

$=O(x^n)$, x के लघु मानों के लिये

$R(\nu+n+2n+\frac{3}{2})>0$, $R(\nu+n)>-1$, $\mu>0$, n शून्य एवं धनात्मक पूर्णांक है

और $$\mathcal{J}^{\mu}_{\lambda}(x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-x)^{\gamma}}{!r\,\Gamma(1+\lambda+\mu r)};\ (\mu>0).$$

उपर्युक्त उत्क्रमण सूत्र (1.6) की सहायता से द्वितीय उत्क्रमण सूत्र प्राप्त करते हैं:

यदि $$\phi(p, q)=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}(px)^{1/2}(qy)^{1/2}\ \mathcal{J}^{\mu_1}_{\nu_1,\lambda_1}(px)\ \mathcal{J}^{\mu_2}_{\nu_2,\lambda_2}(qy) f(xy)\, dx\, dy \tag{1·7}$$

तो $$f(x, y)=\frac{(-1)^{\lambda_1+\lambda_2}\cdot 2}{\mu_1\mu_2}\int_0^\infty\int_0^\infty\left(\frac{px}{2}\right)^{2/\mu_1(\nu_1+\lambda_1+1)-\nu_1+\lambda_1-3/2}\mathcal{J}_{\nu_1+\lambda+1}^{1/\mu_1}\left[(px)^{2/\mu_1}\right]$$

$$\times\left(\frac{qy}{2}\right)^{2/\mu_2(\nu_2+\lambda_2+1)-\nu_2-\lambda_2-3/2}\times\mathcal{J}_{\nu_2+\lambda_2+1}^{1/\mu_2}\left[(qy)^{2/\mu_2}\right]\phi(p, q)\ dp\ dq$$

जिसमें $R(\nu_r+2\lambda_r+n_r+\frac{3}{2})>0$, $R(\nu_r+\lambda_r)>-1$, $\mu_r>0$ और λ_r एक शून्य एवं धनात्मक पूर्णांक है, $r=1, 2$.

(1.2) से हमें

$$\phi(p, q)=\int_0^\infty(px)^{1/2}\mathcal{J}_{\nu_1,\lambda_1}^{\mu_1}(px)\ dx\ \int_0^\infty(qy)^{1/2}\mathcal{J}_{\nu_2,\lambda_2}^{\mu_2}(qy)f(x, y)\ dy$$

प्राप्त है

अब $$\psi(q,x)=\int_0^\infty(qy)^{1/2}\mathcal{J}_{\nu_2,\lambda_2}^{\mu_2}(qy)f(x, y)\ dy \tag{1·8}$$

लेने पर तथा (1.6) का प्रयोग करने से (1.8) के लिये हम निम्नलिखित उत्क्रमण सूत्र प्राप्त करते हैं :–

$$f(x, y)=\frac{(-1)^{\lambda_2}\sqrt{(2)}}{\mu_2}\int_0^\infty\left(\frac{qy}{2}\right)^{2/\mu_2(\nu_2+\lambda_2+1)-\nu_2-\lambda_2-3/2}\mathcal{J}_{\nu_2+\lambda_2+1}^{1/\mu_2}\left[(qy)^{2/\mu_2}\right]\psi(q,x)\,dq \tag{1·9}$$

जिसमें $f(x, y)=O\{e^{-(x^2+y^2)}\}$, x और y के वृहद मानों के लिये

$=O[x^{\eta_1}\ y^{\eta_2}]$, x और y के लघु मानों के लिये

$R(\nu_2+2\lambda_2+\eta_2+\frac{3}{2})>0$, $R(\nu_2+\lambda_2)>-1$, $\mu_2>0$, और λ_2 एक धनात्मक पूर्णांक है ।

इस प्रकार (1·7) निम्नलिखित रूप में परिवर्तित होता है

$$\phi(p, q)=\int_0^\infty(px)^{1/2}\mathcal{J}_{\nu_1,\lambda_1}^{\mu_1}(px)\ \psi(q, x)dx \tag{2·0}$$

पुनः (1·6) की सहायता से हम

$$\psi(q, x)=\frac{(-1)^{\lambda_1}\sqrt{2}}{\mu_1}\int_0^\infty\left(\frac{px}{2}\right)^{2/\mu_1(\nu_1+\lambda_1+1)-\nu_1-\lambda_1-3/2}\times\mathcal{J}_{\nu_1+\lambda_1+1}^{1/\mu_1}\left[(px)^{2/\mu_1}\right]\phi(p, q)\ dpdq \tag{2·1}$$

प्राप्त करते हैं ।

(1·8) से $\psi(q, x)=O(e^{-x^2})$, x के वृहद मानों के लिये

$=O(x^{\eta_1})$, x के लघु मानों के लिये

और इसलिये (2·0) और 2·1) तभी सत्य है जबकि

$$R(\nu_1+2\lambda_1+\eta_1+\tfrac{3}{2})>0$$

$R(\nu_1+\lambda_1)>-1$, $\mu_1>0$, और λ_1 एक शून्य एवं धनात्मक पूर्णांक है।

(2·1) से $\psi(q, x)$ का मान (1.9) में स्थापित करने पर

$$f(x, y)=\frac{(-1)^{\lambda_1+\lambda_2}}{\mu_1\mu_2}\times 2\int_0^\infty\left(\frac{qy}{2}\right)^{2/\mu_2(\nu_2+\lambda_2+1)-\nu_2-\lambda_2-3/2}\times\mathcal{J}_{\nu_2+\lambda_2+1}^{1/\mu_2}(qy)^{2/\mu_2}$$

$$\times\int_0^\infty\left(\frac{px}{2}\right)^{2/\mu_1(\nu_1+\lambda_1+1)-\nu_1-\lambda_1-3/2}\times\mathcal{J}_{\nu_1+\lambda_1+1}^{1\mu_1}(px)^{2/\mu_1}\phi(p,q)\,dp\,dq$$

प्राप्त करते हैं जिसमें $R(\nu_\gamma+2\lambda_\gamma+\eta_\gamma+\tfrac{3}{2})>0$, $R(\nu_\gamma+\lambda_\gamma)>-1$, $\mu_\gamma>0$, और λ_γ एक शून्य एवं धनात्मक पूर्णांक है, $\gamma=1, 2$.

निर्देश

1. पाठक, आर० एस० । नेशनल० एके० साइं० (इंडिया), 1966, **36** A, 809-16
2. हार्डी, जी०एच० । प्रोसी० लन्दन मैथ० सोसा०, 1925, **11**, 53.
3. अग्रवाल, आर० पी० । Annals de la soc. scient, Bruxelles 1950, **64**, 164–168.
4. पाठक, आर० एस० । जर्न० साइं० रिसर्च, बनारस हिन्दू वि० वि०, 1964–65, **25** (2).
5. रीड, आई०एस० । ड्यूक मैथ० जर्न०, 1944, **11**, 565–74.